Streszczenie

Ta rozprawa doktorska koncentruje się na równaniach agregacji-dyfuzji (ADE), które modelują rozkład gęstości obiektów (cząstek, etc.) w czasie, pod wpływem nielokalnych interakcji oraz nieliniowej dyfuzji. Równania te opisują różne zjawiska fizyczne i biologiczne, m.in.: przyciąganie grawitacyjne, chemotaksję oraz zachowanie tłumu. Interpretowane są jako ciągły opis interakcji między cząstkami, gdzie każda cząstka ma przyporządkowane położenie i pęd. Rozprawa ta dzieli się na trzy części.

W pierwszej części rozwijana jest teoria w przestrzeni L^p dla równań ADE z jądrem (opisującym interakcje) w postaci funkcji potęgowej. Rozwiązania tego zagadnienia są globalne w czasie oraz ograniczone, ale wykazują koncentrację dla dostatecznie małej dyfuzji tzn. można zaobserwować istotną akumulację części rozwiązania w małym otoczeniu punktu zero. Może to być interpretowane jako jakościowy opis osobliwości powstającej przy braku dyfuzji. Główne narzędzia zastosowane w tej części opierają się na oszacowaniach *a priori*, metodzie momentów oraz uśrednianiu rozwiązania w czasie poprzez całkowanie.

Druga część rozprawy dotyczy badania istnienia rozwiązań stacjonarnych równań ADE, z ogólniejszym jądrem potęgowym, metodą punktu stałego. Wyprowadzono jawne wzory na niektóre z tych rozwiązań, które bywają cenne w kontekście weryfikacji ogólnych metod numerycznych. Co więcej, udało się wyprowadzić jawny wzór na rozwiązanie zmiennego znaku w jednym wymiarze, posiłkując się wynikami dotyczącymi równania Burgersa.

Tematem ostatniej części jest paraboliczno-eliptyczny układ równań różniczkowych, rozważany w całej przestrzeni, znany również jako model Kellera-Segela, który modeluje rozkład gęstości komórek oraz ich interakcje poprzez stężenie chemoatraktantu. W tym problemie funkcje stałe są rozwiązaniami stacjonarnymi. Udało się rozwinąć teorię lokalnych w czasie rozwiązań w jednorodnie lokalnych przestrzeniach Lebesgue'a, wraz z opisem dynamiki rozwiązań dla dużych wartości czasu. Niektóre stałe rozwiązania stacjonarne są stabilne. Z drugiej strony, powyżej pewnej wartości krytycznej, stałe stany stacjonarne wykazują niestabilność.