Tomasz Rychlik
Instytut Matematyczny PAN
Śniadeckich 8
00656 Warszawa

Warszawa, 23 listopada 2017 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marii Kamińskiej-Zabierowskiej
pt. *Zachowanie porządków stochastycznych przez przekształcenia definiowane w teorii niezawodności*

Praca doktorska pani Kamińskiej-Zabierowskiej liczy 60 stron. Jest poświęcona zachowaniu (bądź odwracaniu) rozmaitych porządków stochastycznych przez przekształcenia monotoniczne zmiennych losowych, uogólnioną transformatę łącznego czasu testowania (Autorka używa akronimu GTTT od angielskiego określenia *generalized total time on test*), mieszanie zmiennych losowych czy wreszcie konstrukcję systemów niezawodnościowych zbudowanych z jednakowych działających niezależnie komponentów (co w języku matematycznym oznacza mieszaninę rozkładów statystyk pozycyjnych pochodzących z prób niezależnych o jednakowym rozkładzie). Wyniki te zostały opisane odpowiednio w Rozdziałach 2-5 rozprawy, która ponadto składa się ze wstępu zawierającego nieformalny opis uzyskanych wyników, spisów treści i ilustracji, wykazu oznaczeń, Rozdziału 1, w którym zgromadzono definicje pojęć używanych w zasadniczej części pracy oraz bibliografii obejmującej 35 pozycji w niej cytowanych.

W Rozdziale 2 są oddzielnie rozważone przekształcenia zmiennych losowych ściśle rosnące i ściśle malejące (czasami dodane są jeszcze założenia wypukłości i wklęsłości tych przekształceń). Rozdział ten ma przede wszystkim charakter porządkujący dotychczasową wiedzę. Pani Kamińska-Zabierowska niejednokrotnie koryguje niechlujstwo innych autorów, którzy uzyskiwali klasyczne wyniki ułatwiając sobie zadanie przez narzucanie dodatkowych upraszczających rozumowanie założeń, np. jedno- lub wielokrotnej różniczkowalności funkcji, absolutnej ciągłości rozkładów itp. Rozdział 2 zawiera jednak pewną liczbę własnych wyników Autorki:

- Fakt 2.4(ii) o odwróceniu porządku dyspersyjnego przez rosnące wklęsłe przekształcenia zmiennych (gdy oryginalne zmienne są też uporządkowane stochastycznie),
- Fakt 2.7 o odwróceniu porządku gwiaździstego przez wypukłe rosnące przekształcenia (znów z dodatkiem założenia stochastycznego uporządkowania),

- Fakt 2.14 o zachowaniu (odwróceniu) porządku dyspersyjnego przez malejące wklęsłe (odpowiednio wypukłe) transformacje (też z analogicznym dodatkiem),

- Fakt 2.16 z podobną tezą dla porządku gwiaździstego

(Fakty w rozprawie są odpowiednikami angielskiego pojęcia Proposition, które zawiera stwierdzenie nieco słabszej wagi niż twierdzenie),

- oraz Twierdzenie 2.17 o zależnościach między porządkami ew i lir (szczególnymi przypadkami porządku GTTT z interpretacjami ekonomicznymi) uzyskanymi wskutek malejących przekształceń zmiennych losowych.

Rozdział ten zawiera jeden istotny błąd w Przykładzie 2.A, co dyskwalifikuje użyteczność tego przykładu. Mianowicie, iloraz $\frac{G(x)}{F(x)}$ w przedziale $(0,1)$ wynosi 2, a nie $\frac{1}{2}$, co implikuje relację $F \geq_{rh} G$, przeciwną do zamierzonej. Drobną nieścisość zauważyłem też w wyróżnionym wzorze na str. 21: ponieważ wywód dotyczy nie tylko zmiennych ciągłych, ostatnie wyrażenie we wzorze powinno by zastąpione przez jego lewostronną granicę (podobna uwaga dotyczy wzoru w linii na Lematem 1.15 na str. 12).

Rozdział 3 oparty jest na pracy Kamińskiej-Zabierowskiej [13] i dotyczy porządku generowanego przez transformatę GTTT. Transformatą GTTT dystrybuanty $F$ indukowaną przez nieujemną funkcję $h$ znikającą poza przedziaem $(0,1)$ jest funkcja

$$H_F^{-1}(u;h) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(u)} h(F(t))dt, \qquad 0 < u < 1,$$

którą w przypadku dystrybuant absolutnie ciągłych można zapisać jako

$$H_F^{-1}(u;h) = \int_0^u \frac{h(t)}{fF^{-1}(t)}\,dt, \qquad 0 < u < 1.$$

Ponieważ jest to funkcja ciągła, nieujemna i niemalejąca na $(0,1)$, może być interpretowana jako funkcja kwantylowa pewnej ciąglej dystrybuanty czasu życia $H_F(\cdot;h)$. Dystrybuanty $F$ i $G$ są uporządkowane względem porządku transformaty GTTT indukowanej przez $h$ (ozn. $F \leq_{TTT}^{(h)} G$), gdy ich transformaty są uporządkowane stochastycznie $H_F(\cdot;h) \leq_{st} H_G(\cdot;h)$. Dwa najważniejsze wyniki tego rozdziału zapisane zostały w Twierdzeniach 3.12 i 3.14. Pierwsze z nich głosi, że jeśli $F$ i $G$ są dystrybuantami absolutnie ciągłymi startującymi ze wspólnego punktu i $F \leq_{TTT}^{(h)} G$ dla pewnej funkcji zniekształcającej $h$ (tzn. rosnącej przekształcającej przedział $[0,1]$

na siebie), to również $H_F(\cdot;\varphi) \leq_{TTT}^{(h)} H_G(\cdot;\varphi)$ dla dowolnego malejącego induktora $\varphi$. W drugim podano, że dla dowolnych $F$ i $G$ uporządkowanych w porządku wypukłym $F \leq_c G$ i ustalonej funkcji zniekształcającej $h_0$, warunek $F \leq_{TTT}^{(h_0)} G$ implikuje $H_F(\cdot;\varphi_1) \leq_{TTT}^{(h)} H_G(\cdot;\varphi_2)$ dla dowolnej funkcji zniekształcającej $h$ i induktorów $\varphi_1$, $\varphi_2$ spełniających nierówność $\varphi_1 \leq \varphi_2$ na całym przedziale jednostkowym. Moja krytyczna uwaga dotycząca tego rozdziału jest związana z faktem, że Autorka powołuje się i wykorzystuje we wnioskowaniu rezultaty Bartoszewicza i Benduch [6], którzy uzyskali swoje wyniki przy założeniu ciągłości funkcji zniekształcających. W rozprawie założono jedynie ich mierzalność i nie przedstawiono uzasadnienia dla tego rozszerzenia.

Rozdział 4 dotyczy problemu zachowania porządków przez mieszaniny rodzin rozkładów uporządkowanych. Szczególna uwaga poświęcona jest tam mieszankom zmiennych losowych wykładniczych. Znaczną część tego rozdziału stanowiło uporządkowanie wyników innych autorów. Istotny (choć niezbyt nowatorski) przyczynek pochodzący od Autorki stanowiły teza i dowód Twierdzenia 4.3 dla porządku odwrotnego hazardowego. Znacznie ciekawsze byo Twierdzenie 4.13 i wynikające z niego Wnioski 4.14 i 4.16, wywodzące się z pracy [13]. Twierdzenie głosi, że jeśli dwa rozkłady mieszające z gęstościami, z których przynajmniej jeden jest typu IFR, są tak samo uporządkowane w porządku wypukłym i GTTT względem pewnego induktora zniekształcającego, to mieszaniny zmiennych wykładniczych względem tych rozkładów są uporządkowane w przeciwnym kierunku względem porządków transformaty GTTT indukowanych przez dowolne funkcje zniekształcające. Jako istotne uchybienie w tym rozdziale zauważyłem jedynie brak założenia o maleniu gęstości $g$ we Wniosku 4.7(ii).

Najbardziej spektakularnym osiągnięciem mgr Marii Kamińskiej-Zabierowskiej w teorii niezawodności (p. Rozdział 5) jest znalezienie istotnego błędu w pracy Navarro, Balakrishnana i Samaniego [26]. Ci trzej autorzy to trzy największe autorytety wśród aktualnie aktywnych badaczy niezawodności. W [26] "udowodnili", że dla systemów z sygnaturami $\mathbf{s}_1$ i $\mathbf{s}_2$ zbudowanych z identycznych niezależnie działających elementów o jednakowych dystrybuantach czasów życia odpowiednio $F$ i $G$, relacje $\mathbf{s}_1 \leq \mathbf{s}_2$ i $F \leq G$ w porządkach hazardowym i ilorazu wiarogodności implikują te same relacje dla rozkładów czasów bezawaryjnej pracy systemów. Okazuje się, że nie jest prawdziwa nawet analogiczna słabsza teza, gdy obydwa systemy mają takie same sygnatury. Tezy te wydają się mieć bardzo silne intuicyjne uzasadnienie. Po pierwsze, są one prawdziwe dla zwykłego porządku stochastycznego (p. Twierdzenie 5.18). Po drugie, pierwsza silniejsza z nich jest prawdziwa, gdy $F = G$ (p. Wniosek 5.16), a zatem poprawienie czy pogorszenie wytrzymałości elementów w odpowiednim porządku powinno dalej pogłębić relacje uporządkowania czasów pracy systemów. Po trzecie wreszcie, druga teza jest prawdziwa dla sygnatur wersorowych (tzn. dla systemów typu $k$-spośród-$n$), których kombinacjami wypukłymi są wszystkie inne sygnatury (p. Twierdzenie 5.9). Kamińska-Zabierowska i Navarro [14] (p. Przykład 5.D) udowodnili przez wskazanie kontrprzykładu, że druga słabsza teza jest nieprawdziwa w przypadku porządków hazardowego i ilorazu wiarogodności. Pani Kamińska-Zabierowska pokazała w Przykładzie 5.E, że jest ona też fałszywa dla porządku odwrotnego hazardowego. Oryginalnym osiągnięciem Autorki jest również Twierdzenie 5.29 stanowiące uogólnienie Twierdzenia 2.1 z pracy Nandy i in. [23], a zarazem rozszerzenie wyniku Navarro i in. [27] na przypadek porządku ilorazu wiarogodności. Mówi ono, że dla dowolnych systemów o sygnaturach $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ i wielomianach przeżycia $\chi_1$, $\chi_2$, zbudowanych z jednakowych, niezależnych komponentów o dystrybuantach czasu bezawaryjnej pracy $F$ i $G$, jeżeli jedna z funkcji $\frac{p\chi_i''(p)}{\chi_i'(p)}$, $i = 1, 2$, jest malejąca oraz $F \leq G$ i $\mathbf{s}_1 \leq \mathbf{s}_2$ w porządku ilorazu wiarogodności, to porządek ten jest dziedziczony przez rozkłady czasów życia systemów. W Rozdziale 5 zauważyłem dwie istotne nieścisłości. Po pierwsze, wzór Samaniego z Twierdzenia 5.13 zachodzi dla systemów złożonych z jednostek o niezależnych, jednakowych (nawet nieciągłych) rozkładach czasów życia (co więcej, wystarczy permutowalność rozkładu łącznego), ale interpretacja $s_i = \mathbb{P}(Y = X_{i:n})$ (por. Definicja 5.12) jest prawdziwa jedynie w przypadku ciągłym. Po drugie, w dowodzie Twierdzenia 5.25 nie została wykorzystana explicite własność dodatniości i wzrostu wielomianu przeżycia $\chi$.

W swojej pracy doktorskiej pani mgr Maria Kamińska-Zabierowska zaimponowała mi głęboką znajomością wielorakich porządków stochastycznych i powiązań między nimi. Godne podkreślenia jest staranie o przedstawienie wyników w możliwie najogólniejszej postaci, z odrzuceniem zbędnych ograniczających założeń. Za najbardziej wartościowe uważam osiągnięcia Rozdziałów 3 i 5. Istotną słabością rozprawy jest stosunkowo nieduża proporcja wyników własnych Autorki. Wystarcza ona jednak do przyznania pozytywnej oceny całej pracy.

**W podsumowaniu uważam, że przedstawiona praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgr Marii Kamińskiej-Zabierowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**