Recenzja rozprawy doktorskiej Grzegorza Świderskiego
Spectral properties of unbounded Jacobi matrices

Warszawa, 20 XII 2016

1 Ogólny opis i ocena merytoryczna rozprawy

Rozprawa (prezentowana w języku angielskim) rozpoczyna się od interesującego, a zarazem bardzo obiecującego Wstępu, w którym Autor szczegółowo sformułował jej najważniejsze matematyczne wyniki, komentując także ich rolę na tle istniejących już rezultatów. Po Wstępie nastepują Preliminaria — Autor formułuje tam nieco fachowych podstaw omawianej tematyki i dowodzi kilku ogólnych wyników spoza głównego nurtu *Rozprawy*, pomocniczych dla późniejszych rozważań. Po tym następują trzy zasadnicze części (Part 1., 2., 3.), odpowiadające swą zawartością trzem odrębnym pracom matematycznym, na których oparto *Rozprawę* (w tym jedna już opublikowana i jedna z dwóch pozostałych — napisana ze współautorem).

Pierwsza z części poświęcona jest lokalizacji widma istotnego oraz niekiedy, dodatkowo, pustością widma punktowego dla pewnych klas samosprzężonych operatorów Jacobiego (zwanych też macierzami Jacobiego), dla których ciąg tzw. wag (tzn. ciąg na „nad/pod-diagonali" odpowiedniej nieskończonej macierzy) jest w odpowiednim sensie bliski ciągowi rosnącemu (do $+\infty$). Uzyskano tu ciekawe przykłady wyników zarówno z widmem istotnym pokrywającym całą prostą, jak i równym odpowiedniej półprostej, uogólniając przy tym wiele znanych już wyników dla dość ogólnych klas. Podstawową metodą są szacowania przemyślnie dobranych form kwadratowych związanych z uogólnionymi wektorami własnymi operatora, pozwalajace wykazać, że przy odpowiednich λ żaden z nich nie należy do l^2.

W części drugiej *Rozprawy* badane są wyniki spektralne już subtelniejsze — dotyczą bowiem absolutnej ciagłości operatorów Jacobiego. Przy użyciu pewnych delikatnych a zarazem niemal jednostajnych po parametrze spektralnym „λ" oszacowań (w pewnych rejonach prostej rzeczywistej), Autor dowodzi warunków, które w szczególności uniemożliwiają (i to znów „w sposób jednostajny") istnienie subordynowanych uogólnionych wektorów własnych. Powyższe szacowania to szacowania dla ciągów będących de facto modyfikacjami tzw. determinantów (wyznaczników) Turána, również powiązanych z formami kwadratowymi w rodzaju rozważanych w części pierwszej. Znów otrzymuje się tą drogą sporo interesujących nowych przykładów absolutnej ciągłości (część z tego pod warunkiem poprawienia niektórych dowodów...).

Część trzecia, ściśle powiązana z drugą, wykorzystuje i doprecyzowuje uzyskane już jednostajne szacowania i znajduje związki uzyskanych asymptotyk z gąstością miary spektralnej (absolutnie ciągłej wzgl. miary Lebesgue'a w tych przypadkach). Główna idea oparta jest na wykorzystaniu podobnych wyników Geronimo i Van Assche, uzyskanych jednak dla całkiem innych operatorów Jacobiego — „bliskich" okresowym. Inteligentny pomysł (choć wymagający uzupełnień) pozwala dokonać aproksymacji przypadku nieograniczonego ograniczonymi operatorami Jacobiego okresowymi od pewnego „coraz dalszego" miejsca (w sensie okresowości ciągu wag i diagonali). Powyższy pomysł opiera się na przejściu od odpowiedniej "zbieżności" ciągu rodzin wielomianów ortogonalnych do odpowiedniej zbieżności ciagu „miar ortogonalności" tych rodzin. Uzyskane tu rezultaty należy uznać za rzadki z punktu widzenia teorii spektralnej macierzy Jacobiego opis gęstości miary spektralnej dla dość ogólnych nieograniczonych klas takich operatorów.

Ocenę *Rozprawy* zacznę od wypunktowania niewątpliwych jej zalet:

(i) Wszystkie podstawowe rezultaty (twierdzenia etc) w wersji zaprezentowanej we wstępnych częściach to wyniki matematyczne bardzo interesujące z perspektywy obecnego stanu wiedzy z teorii spektralnej dla nieograniczonych operatorów („macierzy") Jacobiego. Zapowiadają istotny postęp (podobny typ tezy, przy innych, niekiedy dużo ogólniejszych założeniach) w stosunku do wielu znanych wyników. [Tu jednak należy od razu zrobić zastrzeżenie dot. problemów merytorycznych i redakcyjnych opisanych dalej]. Nawet elementarnie proste w dowodzie Proposition 1 z Preliminaries, zapowiedziane przez Autora jako "well-known" jest ciekawym i, jak mi się zdaje, nie publikowanym dotąd wynikiem.

(ii) Theorem A (= Theorem 1) i „daleki" wniosek z niego — Corollary A (= Theorem 7) to przykłady wyników uzyskanych z jednej strony metodami niemal elementarnymi, a z drugiej bardzo skutecznych. Pokazują siłę metod opartych na badaniu de facto dość prostych form kwadratowych dla „$\mathbb{R}^2$-wektorowych uogólnionych rozwiązań własnych". Zawierają istotny nowy wkład Autora — uogólnienie dawnej znanej metody (m. in. stosowanej przez J. Dombrowski i Pedersena) poprzez dopuszczenie dodatkowego „abstrakcyjnego", tzn. spełniającego abstrakcyjne – ogólne założenia, ciągu liczbowego $\{\alpha_n\}$ (stosownieo dobranego do wag i diagonali rozważanego operatora Jacobiego).

(iii) Z kolei nieco podobnie, Theorem B (oparte na Theorem 9) oraz Theorem C (oparte na Theorem 10) uzyskane są przez uogólnienie pewnych metod (m. in. stosowanych przez S. L. Clarka) skutecznych dla ciągów o wahaniu ograniczonym (tj. ze skończonym ν_1 wg oznaczeń z pracy) i przeniesieniu ich na nieco podobną, ogólniejszą klasę opartą na podciągach „dla ustalonych reszt modulo N" przy dowolnych N (wahanie ograniczone odpowiada tu $N = 1$, ogólnie — ze skończonym ν_N, czyli odpowiednikiem ν_N).

(iv) Uogólnienie idące w innym kierunku — od zaburzeń operatorów Jacobiego okresowych, stanowiących kategorię „ze skończonym ν_N" (wyniki J. Geronimo i W. Van Assche) do operatorów Jacobiego już nieograniczonych, ale także zadanych w odpowiedni sposób klasami ciągów „ze skończonym ν_N" — zawarte są w Theorem D i E (= Th. 12 i "+/-" Th. 13, odpowiednio).

(v) Theorem C obejmuje tylko pewien szczególny przypadek nie objęty przez Theorem B, zajmuje się tzw. przypadkiem krytycznym — gdy discr $\mathcal{F}$ (z Th. B) jest równy 0. — To ciekawy przykład skutecznego „zwalczenia" zasadniczych, na ogół niezwykle poważnych trudności technicznych, związanych ogólnie z przypadkami krytycznymi tego rodzaju. Podobnie z Theorem E — krytycznym odpowiednikiem dla Th. D.

(vi) Rozprawa w rzadko spotykany w istniejącej literaturze sposób łączy zarówno język jak i metodologię dwóch tradycyjnie dość odrębnie uprawianych dwóch dziedzin (mimo istniejącego przecież dużego przecięcia — właśnie związanego z operatorami Jacobiego i „trójczłonową rekursją"): Teorii Spektralnej Operatorów Samosprzężonych (tu szczególnie operatorów cyklicznych) oraz Teorii Wielomianow Ortogonalnych.

Niestety jednak *Rozprawa* ma też niezwykle liczne mankamenty. Są luki rozmaitego kalibru, w tym zarówno liczne proste pomyłki, jak i świadome pominięcia niewygodnych w pisaniu / formułowaniu / wyjaśnianiu bardziej zawiłych szczegółów dowodów (czasem nawet choćby szkiców), albo też omijanie elementarnej argumentacji — niekiedy wręcz zdumiewające, czy wreszcie nieudana redakcja wielu części pracy, szczególnie dowodów. Bardzo szczegółowy wykaz moich wszystkich uwag znajduje się w części 3 recenzji. Poniżej zaś wymieniam główne ich typy — dotyczące problemów ± powszechnych w całej rozprawie:

1. Bardzo częsty tu błąd redakcyjny to odwołania podczas dowodów do pewnych fragmentów znajdujących się „wewnątrz" wcześniejszych dowodów z *Rozprawy*, zamiast do całych explicite sformułowanych rezultatów (twierdzeń, lematów itp). Taki zabieg jest, co prawda, w matematycznej pracy dopuszczalny, ale **jedynie wyjątkowo**, np. w uwadze zaraz po danym dowodzie. Ogólnie — dobra praktyka nakazuje używane dalej fakty matematyczne (a już szczególnie — te używane parokrotnie) formułować **uprzednio jawnie** w odpowiedniej formie („gromadzącej" obok siebie i założenia, i tezę...), by to do nich właśnie można było się wygodnie odwoływać. Autor w całej swej długiej i technicznie zaawansowanej pracy unika tej dobrej praktyki „jak ognia"... — To niezmiernie utrudnia prześledzenie prawidłowości przeprowadznych rozumowań! A już szczególnie, gdy np. w momencie użycia do dowodu Tw. Y formuły (x) z **dowodu** Tw. X wcale nie są spełnione wszystkie założenia Tw. X — trzeba wówczas na nowo prześledzić dowód Tw. X, by sprawdzić, czy aby wszystkie założenia potrzebne do **samej formuły (x)** wynikają z założeń dowodzonego Tw. Y... — Dodam, że Autor nigdy w swej pracy takim sprawdzeniem się nie zajmuje — nawet nie wspomina, że jest taka potrzeba... To niejako zaprzeczenie klasycznej tradycji budowania teorii matematycznej — może złe nie tyle ze względu na samą „konieczność szanowania tradycji", ale po prostu z czysto praktycznych względów przejrzystości rozumowania matematycznego.

2. Zbyt mało w pracy wygodnie sformułowanych lematów itp, a także zbyt skąpe powoływanie się w potrzebnych miejscach na wykazane już fakty.

3. Bardzo kłopotliwe dla czytającego pracę jest stosowanie przez Autora niespójnych, zmieniających się pomiedzy częściami i nieprzemyślanych solidnie oznaczeń. To w dużej mierze po prostu pomieszane, nieujednolicone oznaczenia (podobne, jednak różniące się) ze wspomnianych trzech prac. Z kolei jako odwrotny problem, równie niewygodny dla czytelnika, to używanie dość często zbyt zbliżonych oznaczeń dla niepowiązanych obiektów. Pomieszanie tych obu złych praktyk tworzy naprawdę spory bałagan.

4. Niejasności dotyczące obowiązujacych w danym miejscu założeń — to objaw redakcji tekstu zbyt skupionej na samym Autorze, bez myślenia o czytelniku i niedostatecznie sprawdzonej przed utworzeniem ostatecznej wersji pracy.

5. Bardzo często w dowodach panuje także duży bałagan. Brak staranie ułożonej kolejności poszczególnych argumentów, niejasności, niespodziewane spore skoki w rozumowaniu, braki uzasadnień. Wnikliwy czytelnik musi włożyć mnóstwo własnej pracy najpierw w uporządkowanie struktury dowodu, a następnie w sprawdzenie licznych niesprawdzonych przez Autora „detali" (okazujących się być często zupełnie „niedetalami"...).

6. Wielokrotne całkowite pomijanie pewnych dowodów (choćby liczne przykłady z podrozdz. 8.), bez jakiegokolwiek istotnego komentarza.

7. Niezbyt wygodny niekiedy wybór przestrzeni X, której elementami są rozważane ciągi — zamiast tego stosowanie zbyt wielu parametrów dla ciagów (patrz np. uwaga szczegółowa 104.)
8. Także, niestety, błędy lub luki stricte merytoryczne — matematyczne, niekiedy istotne.

Podsumowując te krytyczne uwagi chcę jeszcze sprecyzować, które wady redakcyjne i które stricte matematyczne błędy lub luki uważam w pracy za najpoważniejsze spośród tych, opisanych w końcowej liście szczegółowych uwag.(Kolejnośc na tych listach jest już jednak wyłącznie „chronologiczna”, a powtarzanie się niektórych numerów uwag w obu listach — nieomyłkowe i nieprzypadkowe.)

Redakcja — uwagi nr:

- 99
- 116 łącznie z 120
- 121
- łącznie: 141, 142, 144, 146, 148
- 160
- łącznie: 161, 165, 167, 168, 169, 170, 172, 177, 180, 182, 187, 189, 190, 191, 195, 198
- 202
- 203
- 204.

Błędy / luki / niejasności matematyczne:

- 92 łącznie z 172 — część 2.
- łącznie: 104, 109, 114, 116
- 160 łącznie z 176
- 194.

2 Konkluzja

Po wnikliwej analizie wymienionych wyżej zarówno niewątpliwych istotnych zalet *Rozprawy doktorskiej* pana Grzegorza Świderskiego, jak i jej wad merytorycznych, a przede wszystkim bardzo licznych wad redakcyjnych, również po zgłębieniu treści art. 13. „Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym...”, stwierdzam, że ***Rozprawa* spełnia warunki ust. 1. wspomnianego art. 13. Ustawy.** *Rozprawa* zawiera bowiem niewątpliwie oryginalne rozwiązania kilku istotnych problemów matematycznych, nawet jeśli wyłączyć z niej te części, co do których potrzebne są jeszcze poprawki, uzupełnienia lub wyjaśnienia. Nie budzi też wątpliwości nie tylko ogólna, ale i specjalistyczna wiedza teoretyczna Autora w dziedzinie Analizy: Analizy Funkcjonalnej, Teorii Operatorów oraz Teorii Wielomianów Ortogonalnych. Autor wykazał w *Rozprawie* również pewne znaczące umiejętności prowadzenia samodzielnej pracy naukowej, choć ewidentnie zabrakło mu przy tym zarówno cierpliwości, jak i należytej solidności... — Mam jednak obawy, że w obecnych czasach tych ostatnich przymiotów młody naukowiec na ogół — typowo nie posiądzie podczas studiów — w tym studiów doktoranckich, a ewentualnie posiądzie być może dopiero podczas lat dalszej pracy naukowej (i oby...), jeśli zrozumie (czego mu „Środowisko" zbyt często nie ułatwia), że nie szybkość i liczba publikacji jest kluczowa w pracy naukowej i zarazem w sensownym życiu...

Niestety, wspomniane wcześniej mankamenty stanowczo **nie pozwalają na wyróżnienie *Rozprawy*,** choć jestem przekonany, że byłaby ona wręcz znakomitym do tego kandydatem, gdyby Autor zdecydował się złożyć ją ponownie — w nowej zupełnie wersji, po rzetelnym uzupełnieniu wskazanych luk i naprawieniu niedociągnięć redakcyjnych — do czego ja bym szczerze namawiał (choć mam świadomość ogromu potrzebnej tu pracy Autora).

Po powyższych oficjalnych (lecz bynajmniej nie fikcyjnych!) stwierdzeniach, pozwolę sobie na istotną, prywatną już konkluzję, a może raczej tylko opinię, w sprawach, co prawda formalnie niezależnych od postępowania w przewodzie doktorskim, ale w tym przypadku, blisko z nim powiązanych. Chodzi mianowicie o trzy prace Autora, które stanowią podstawę *Rozprawy* i de facto zawierają się w niej w formie niemal niezmienionej. Stanowczo uważam, że Autor (wzgl. Autorzy) powinni niezwłocznie wycofać te z nich, które jeszcze nie zostały w formie ostatecznej opublikowane i ponownie starać się o ich publikację **dopiero po wyjaśnieniu wszystkich wątpliwości merytorycznych, jak i po gruntownych ulepszeniach redakcyjnych** — de facto nowej „kompozycji" (w czym, na co liczę, powinny dopomóc niżej zamieszczone szczegółowe uwagi do *Rozprawy*, stanowiące w większości, także uwagi do owych trzech prac).

3 Lista szczegółowych uwag (głównie krytycznych[1])

Uwagi są tu numerowane w kolejności „chronologicznej”, zatem przemieszane są tu liczne uwagi naprawdę drobne z tymi bardziej istotnymi, i z najważniejszymi. Dlatego, dla większej przejrzystości, po numerze uwagi podane są skróty, opisujące m. in. kategorię uwagi. Niekiedy zaznaczam też moją (więc subiektywną...) ocenę konieczności jej uwzględnienia. — Choć praca nie jest przeznaczona do druku (a wręcz po części już **była** drukowana), kieruję się w tym wypadku przede wszystkim kryteriami „redakcyjno-publikacyjnymi”.

Oznaczenia, skróty (po numerze uwagi):

Kategoria (— ogólny powód uwagi) + **dodatki:**

Bł — błąd, ew. luka (w dowodzie, i in.)

BD — brak dowodu (ew. jego fragmentu) lub dowód stanowczo zbyt lakoniczny

Niej — niejasne, nieścisłość lub niezrozumiały fragment

Ozn — problem z oznaczeniami

Red — problem redakcyjny, stylistyczny itp

Drob — drobne przeoczenie, drobna pomyłka, np. typu „literówka” itp

I — inne

dodatki : (głównie do **Bł** i do **BD**)
-OK — sprawdziłem, że błąd/dowód/nieścisłość daje się naprawić/uzyskać/uzupełnić (**bez** konieczności zmiany sformułowania, dokładania założeń itp);
-?? — mam wątpliwości, czy ... (j.w.)

Waga — (nie jedynie merytoryczna[2], ale jak ważne jest uwzględnienie uwagi dla osiągnięcia rzetelnego poziomu „publikacyjnego”):

!! — konieczne

! — bardzo wskazane

ew. — zalecane

(bez ozn.) — bez mojego wyraźnego wskazania, co jednak nie wyklucza, że może być nawet **!!**...

linie na stronie

l.n — linia n-ta od góry (bez pustych linii, nagłówków i stopek stron itp)

l.-n — linia n-ta od dołu (j.w.)

[1] Opis pozytywnych stron pracy znajduje się we wcześniejszej części recenzji.

[2] Numery uwag najistotniejszych z merytorycznego punktu widzenia — jako problemów matematycznych — także zostały wymienione we wcześniejszej części recenzji.

MK

Introduction

1. **Drob; !;** *str. 4 i dalej, nagłówki lewe w Introduction*: "CONTENTS"...??
2. **Niej / Ozn; ew.;** *str. 4, pod macierzą*: Nie powinno sie oznaczać tym samym symbolem A tzw. operatora formalnego (w przestrzeni liniowej wszystkich ciągów) utożsamianego z macierzą nieskończoną oraz wyznaczonego przez niego operatora maksymalnego w l^2 — patrz też uw. 60.
3. **Drob; !;** *str. 4, (1)*: Samo ustalenie czym jest p_{-1} nie wystarcza, by nadać sens iloczynowi $a_{-1}p_{-1}$ — patrz uw. 22.
4. **Drob; !;** *str. 5, l.3*: "the **topological** support".
5. **Red;** *str. 5, l.5–7*: Patrz uw. 24. i 25.
6. **Drob; ew.;** *str. 5, linia 4. nad Problem A*: Raczej "article [57]/ the article [57]", lecz nie "an".
7. **Drob; ew.;** *str. 5, linia 1–2. w Problem A*: Raczej albo "the smallest point ρ of ... exists", albo "the infimum ρ of ... is finite".
8. **Drob; ew.;** *str. 5, w przypisie*: Taka definicja widma istotnego jest, co prawda, słuszna dla samosprzężonego oper Jacobiego, ale nie jest poprawna dla ogólnych samosprzężonych operatorów (punkt izolowany widma też należy do widma istotnego, gdy ma krotność nieskończoną jako wartość własna).
9. **Niej; ew.;** *str. 6, l.5*: "$\rho = +\infty$" — chodzi o puste widmo istotne?
10. **Drob; ew.;** *str. 6, l.7*: Brak numeru "Section".
11. **Drob; ew.;** *str. 7, l.-6*: Raczej "**all / various** generalized..."
12. **Drob; ew.;** *str. 8, l.7–8.*: "spectrum is absol. cont." — może lepiej trzymać się jednolitej terminologii — wcześniej używane było "**operator** is absol. cont.".
13. **Red; !;** *str. 9, nad Th. B*: "we prove"— tak naprawdę dowodu nie ma — trzeba go samemu „złożyć" z Tw. 9 (str. 33) i Prop. 5 (str. 35 i 36).
14. **Red; !;** *str. 9, l.-1*: "proved" — podobnie Th. C otrzymać można z Th. 10 i Prop. 8, ale brak komentarza o tym.
15. **Red; !;** *str. 10, l.1*: Powinno tu być jakieś wstępne wyjaśnienie dot. q po "Suppose that" (np. "$q \in \ldots$ and ..."), ponieważ nie jest jasne, że niedawne uwagi dot. q mają być de facto założeniami tego tw.
16. **Red; !;** *str. 10, l.9–10*: W linii 9 nie może być koniec zdania. I dalej: "where the numbers ... are..."
17. **Red; !;** *str. 11, Th. E*: W zasadzie to jest to, co Tw. 13. str. 60., ale z obecnej postaci założeń Th. C (z którego bierzemy założenia do E) nie wynika, że q jest postaci takiej, jaka jest założona w Tw. 13. — patrz uw. 15. Ponadto, tu nie potrzeba zakładać warunku Carlemana — wynika on już z pierwszego zał. Tw. C (ciąg kolejnych przyrostów wag musi być ograniczony).

18. **Red**; !; *str. 12, l.3*: "In Section..." - to powtórzenie zdania ze strony poprzedniej (nad Th. D) — w jakim celu?

Preliminaries

19. **Red**; **ew.**; *str. 12, poczatek "Preliminaries"*: Tu od samego początku wydaje się, że pewna część założeń poczynionych we Wstępie jest uznawana za nadal obowiązującą. Nie jest jednak do końca jasne, jaka to część. Przydałoby się jakieś wyjaśniające zdanie na ten temat.

20. **Niej**; ! ; *str. 12, zdanie 2 "Preliminaries"*: Przykładem powyższej sytuacji (z uw. 19.) jest już drugie zdanie — pierwotnie wydawałoby się, że chodzi tu o dowolny operator samosprzężony w pewnej przestrzeni Hilberta, jednak dalej okazuje się, że raczej Autor miał na myśli tylko A, będące operatorem („macierzą") Jacobiego. Np. może dodać "Jacobi" przed "operator"?

21. **Red**; *str. 12, l.-6*: "non-zero" — Autor ma prawo tak zakładać dla uog. wekt. wł., jednak użycie "is called" sugeruje, że to umowa powszechna. Tymczasem często rozwiązanie zerowe (4) również zalicza się do uog. wekt. wł. (choćby po to, by mieć przestrzeń liniową). Może więc bezpieczniej byłoby użyć czegoś w stylu "here we assume...".

22. **Drob**; !; *str. 12, l.-2*: Po pierwsze, lepiej nie (4) (bo ono ogranicza się do $n \geqslant 1$, a tu chodzi o $n = 0$) lecz już nieco poprawniej "from (4)". Po drugie, samo "umówienie się" czym jest u_{-1} jednak nie wystarcza, by nadać sens iloczynowi $a_{-1}u_{-1}$ (czym jest bowiem "coś bez sensu" razy zero? — wg. mnie — nadal "czymś bez sensu"...) Ponadto, wkrótce a_{-1} potrzebne jest, by „przyrost wag" miał sens też dla $n = 0$ (w Tw. C).

23. **Drob**; !; *str. 13, l.1*: By to faktycznie było p_n, zabrakło założenia, że $u_0 = 1$ (jest co prawda za chwilę, to jednak zbyt późno).

24. **Red**; *str. 13, pierwsza połowa strony 13, także nico fragmentów z 12*: Powtórzone są duże fragmenty już niedawno sformułowane we Wstępie — czy to celowy (i potrzebny) zabieg?

25. **Red**; *str. 13, akapit od "We say"*: Tu jest podane bardziej twierdzenie niż definicja absolutnej ciągłość — dotyczy szczeg. przypadku s.s. operatorów Jacobiego. Pojęcie absolutnej ciągłości definiuje się przecież dla wszystkich operatorów samosprzężonych (choć jest to równoważne w tym szczeg. przypadku). Podanie też tej ogólnej definicji miałoby tu istotny sens i rozwiałoby watpliwości terminologiczne czytelników mniej obeznanych z teorią opreatorów Jacobiego (gdyby zostawić również wskazany już war. równoważny dla op. Jac.). Bez tego mogą mieć wrażenie, że tu chodzi o jakieś inne pojęcie, niż to ogólne.

26. **Drob**; *str. 13, l.-12*: Lepiej chyba "for **any** $\lambda \in I$ and for every... with λ, and normalized ..."

27. **Red**; *str. 14, pod (7)*: "There is..." — wypadałoby podać literaturę, bo (8) nie jest zbyt szybko wyliczalne...

28. **Drob**; !; *str. 14, l.-5*: Tu istotne, że to algebra **normowa** (z podmultyplikatywną normą).

29. **Drob**; *str. 15, l.1*: "... u **for** λ".

MM

30. **Drob;** *str. 15, w Proof dla Prop. 1 — linia z "Observe":* Lepiej dodać: "if such x exists".

31. **Red; !;** *str. 15, Prop. 3.:* Definicje operatorów A_e, A_o są podane tu w sposób trochę nieprecyzyjny (niestety nie tylko tu — w kilku poz. literatury, która dotyczy tych operatorów również...). To odbija się potem w dowodzie tego rezultatu (patrz uw. 34.). Pierwszy problem — dość subtelny, dotyczy słowa "restriction" — ma ono kilka znaczeń (dwa są najważniejsze) w teorii operatorów. Jedno — "ogólno-operatorowe" jest związane z podprzestrzenią niezmienniczą "w sensie dziedziny": *Jeżeli w przestrzeni unormowanej X oper. liniowy B (niekoniecznie z dziedziną X; tu np. $B = A^2$ w sensie algebry samosp. oper. nieogr.) i podprzestrzeń Y (tu odpowiednia "span-o/e", o ile przez* span *Autor oznacza przestrzeń liniową* **domkniętą** *generowaną przez dany zbiór wektorów, a nie tylko liniową — brakuje tu wyjaśnienia dwuznacznego symbolu* span... *) spełniają $By \in Y$ dla każdego $y \in D_1 := D(B) \cap Y$, to przez ten typ "restriction" dla B rozumiemy po prostu obcięcie B do D_1 traktowane jako operator w przestrzeni unormowanej Y.* Drugim rodzajem "restriction", popularnym w teorii spektralnej operatorów samosprzężonych i definiowanym w przypadku przemienności rzutu ortogonalnego na Y z (rzutową) miarą spektralną dla B, jest *operator wyznaczony (via całkowanie) przez odpowiednie "obcięcie do Y" miary spektralnej dla B.* Dla dowodu przeprowadzonego dalej jest bardzo istotne, że w tym wypadku oba rodzaje "restriction" się pokrywają!

Drugi problem — już nie tyle subtelny, co raczej "czysto formalny", jest taki: Autorowi nie chodzi dosłownie o któreś z tych "restriction" — A_e, A_o mają być bowiem w rzeczywistości operatorami znów w przestrzeni l^2 — wymaga to więc jeszcze użycia odpowiednich (łatwych do odgadnięcia...) unitarnych równoważności U_e, U_o pomiędzy l^2 a przestrzenią "span-e/o". Choć można sie domyślić o co chodzi w tym wypadku, brak ścisłego ujęcia sprzyja zaraz w dowodzie ominięciu wspomnianej subtelności, która w istocie jest dla tego dowodu naprawdę istotną trudnością!

32. **Drob; !;** *str. 15, (13):* Dla sensowności tej formuły trzeba przyjąć jeszcze, że $a_{-1} = 0$ — patrz wzór na b_n^e przy $n = 0$.

33. **Drob; !;** *str. 15, l.-2:* "when $0 \notin \ldots$" — tak jak to jest obecnie napisane, nie jest jasne, czy to założenie ma dotyczyć całego zdania rozpoczętego od "Moreover", czy tylko jego części z linii powyżej. Ponadto, raczej "... **the** self-adj.", gdyż inaczej to sugestia, że istnieje jakiś wybór takich operatorów Jacobiego.

34. **BD; !!;** *str. 16, l.1:* Po pierwsze, "direct computation" jest rzeczywiście możliwe jedynie (skoro "direct"...) przy milczącym założeniu, że chodzi tu o "restriction" rozumiane w sensie pierwszym z uwagi 31. Tego jednak Autor nie wyjaśnia. Po drugie, owe "direct computation" **wcale nie dają** całego zdania "wokół (13)" — **dają jedynie zawieranie** A_e, A_o w operatorach Jacobiego zdefiniowanych współczynnikami z (13), które nie są „byle jakimi operatorami powiązanymi" z tymi współczynnikami, lecz operatorami zadanymi na odpowiedniej maksymalnej dziedzinie! Moim zdaniem, by uzyskać rzeczywiście równość potrzebnych operatorów, trudno byłoby się obejść bez wcześniejszego wykazania, że wspomniane w uwadze 31. dwa rodzaje "restriction" dają tu te same operatory (lub bez de facto podobnego wyniku, dotyczącego np. istotnej samosprzężoności niektórych występujących tu operatorów na odpowiednio dobranych dziedzinach). Tej części dowodu tu zabrakło (mimo, że brak jej też w cytowanych w tym dowodzie pracach).

35. **Drob;!;** *str. 16, l.4:* Zapewne chodzi o operator A, nie (nieznany tu) C.

36. **Drob;** *str. 16, l.-3*: Przy operatorze $\widetilde{A}_e$ (a może lepiej $(\widetilde{A})_e$) należałoby wspomnieć, że sens owego $_e$ jest analogiczny jak dla A.

Part 1

37. **Red;** *str. 19, linia 1. dowodu Th. 1.*: "Corol. 1 **and Propos. 1**".
38. **Drob;!;** *str. 19, dwie końcowe formuły*: W pierwszej indeks sumy pow. być k, w drugiej — bez kropki na końcu.
39. **Drob;** *str. 20, l.3.*: "Therefore **for** $n \geqslant N$"
40. **BD-OK; ew.;** *str. 20, Rem. 1.*: Warto explicite wyposać dowód tej zbieżności dla S_n.
41. **Niej; ew.;** *str. 20, pod (a')*: "This shows" — należałoby chyba wyjaśnić, że "by Prop. 4".
42. **Niej; ew.;** *str. 20, l.-5*: Przed "Hence": należałoby dodać, że te oszacowania uzskujemy a priori dla dost. dużych n, ale zachodzą w efekcie dla wszystkich n, dzięki założeniu o dodatniości a — „ciągu wag" dla A.
43. **Drob; ew.;** *str. 21, w Th. 2*: Dość niewygodne już tu oznaczenia (a), (b), ... założeń tego tw., wobec użytych analogicznych przed chwilą w Tw. 1. — szczególnie widać tę niewygodę w dowodzie niżej.
44. **Drob; ew.;** *str. 21, w linii 1./2. dow. Tw. 2*: Czemu (b) pominięte? Nie widać, by było jakieś bardziej oczywiste.
45. **Red; ew.;** *str. 22, w linii 1. Th. 4*: Należy napisać dla jakich x (np. zdefiniować rekurencyjnie N_j — „koniec lewy" odp. przedziału).
46. **Red; ew.;** *str. 22, w linii 2. Th. 4*: I tu należy napisać jakie mogą być argumenty dla g_j. Ponadto tu sugestia, że to tylko arg. naturalne, ale dalej użyte ogólniej dla $x \in \mathbb{R}$ (str. 23).
47. **Red; ew.;** *str. 22, teza Th. 4*: Sądzę, że warto tu (i ew. w dalszych tego typu wynikach, i w brakujących miejscach Wstępu) wymieniać w tezie również samosprzężoność.
48. **Niej; ew.;** *str. 23, l.1*: (d) i (e) też nie zaszkodzi sprawdzić...
49. **Drob; ew.;** *str. 23, l.2*: "To show **the assumption (b) of** ..."
50. **Drob; !;** *str. 23, l.2*: (b) zamiast (a).
51. **Drob; ew.;** *str. 23, l.5*: "Therefore **for** n **large**".
52. **Red; !;** *str. 23, (18)*: Źle wygląda ten brak lewej strony nierówności (można byłoby np. wcześniej oznaczyć jakoś krótko LHS w poprzedniej długiej nierowności i użyć dla LHS tu).
53. **Niej; !;** *str. 23, (18)*: By to uzyskać potrzebowalibyśmy wcześniej wiedzieć, że $c'_n \geqslant 0$...
54. **Drob; !;** *str. 24, (19)*: To sumowanie raczej nie może być od 0, ani nawet od 1, 2 ...

MH

55. **Niej; !;** *str. 24, pod (19)*: " by (b)" + jeszcze nieco więcej szczegółów na temat dowodu pierwszej nierówności poniżej.

56. **Ozn; ew.;** *str. 24, l.5. i 8.*: Proponuję już nie c'_n (patrz str. 23).

57. **Bł-OK; !;** *str. 24, l.7.*: Rozumowanie dające pierwszą w tej linii równość — inaczej, pozbycie się czynnika „$\frac{1}{n}$" — wydaje się błędne! Trzeba jeszcze nieco pracy, by „uporać się" z ciągiem zadanym wzorem
$$\frac{1}{n}\frac{g_K(n-1)}{g_K(n)},$$
nienależącym do l^1 (ponieważ $\frac{g_K(n-1)}{g_K(n)} \longrightarrow 1$).

58. **Niej; ew.;** *str. 24, Rem. 2., linia 2.*: Warto wyjaśnić szczegółowiej, dlaczego "only".

59. **BD-OK; !;** *str. 24, l.-1*: Dlaczego? — przynajmniej (b) należałoby sprawdzić...

60. **Niej / Ozn; ew.;** *str. 25, linia 3. nad Th. 5.*: Raczej macierz Q (patrz (20)) należy utożsamiać z tzw. formalnym operatorem (odpowiednim op. lin. w przestrzeni liniowej wszystkich ciągów skalarnych), a zadany przez niego operator maksymalny w l^2 lepiej oznaczać wtedy nieco innym symbolem. Bez tego łącznie (20) i wzór na $Dom(Q)$ wydają się nie mieć sensu — co bowiem miałoby oznaczać Qx, gdyby $x \notin Dom(Q)$?

61. **Niej / Ozn; ew.;** *str. 25, linia 1. w Proof*: Nieścisłość (macierz/operator) podobna jak powyżej w uw. 60.

62. **Drob; !;** *str. 25, l.-1*: Zabrakło kresek (istotnych...) nad wyrazami obu ciągów.

63. **BD-??; !;** *str. 26, cd dowodu Th. 5.*: Brak tu szczegółów (a są nietrywialne "subtelności"...) przy dwukrotnym stosowaniu Prop. 3 — nie zostało w szczególności w ogóle sprawdzone, czy „delikatne" założenia tego Prop. są spełnione w obu przypadkach! Bez tego nie będzie przecież można użyć Th. 3.

64. **Niej; ew.;** *str. 27, l.2*: Ale nie jest zanadto jasne, czy (ew. dlaczego) pozostałe założenia Th. 5 są spełnione

65. **Niej; !;** *str. 27, druga linia nad 5.2*: Nie bardzo jest jasne, jak Autor chce tu użyć Prop. 2 (czy na pewno chodzi o Prop. 2 z Preliminariów Rozprawy?).

66. **Ozn; !;** *str. 27, linia 4. w Th. 6.*: W zapisie zbioru zer powinien być kwantyfikator ($\exists$...) „dla n" — to trochę sugestia, że chodzi o „$\forall$".

67. **Niej; !;** *str. 27, nad Th. 7.*: "via Prop. 3" — a jego założenia? — Przecież chyba to, co tu założone, to zbyt mało? (A jeśli nie, to dlaczego?)

68. **Ozn; ew.;** *str. 28, w Proof (pod (21))*: Bardzo mylące oznaczenia — „falka" dla A. Szczególnie w kontekście niedawnej falki ze str. 26 — właśnie z dowodu Th. 5 tu użytego. Naprawdę, można się pogubić w tych oznaczeniach...

69. **Drob; !;** *str. 28, linia 3. w Proof*: Pomyłka: pow. być $r_n - b_n$ dla „falkowego" b.

NM

70. **Niej; !;** *str. 28, linia 5. w Proof*: "Th. 5 implies" — brak szczegółów. Np. może dodanie, że tu odpowiedni $\pi_n \equiv 1$ ułatwiłoby zrozumienie, o co Autorowi chodziło.

Part 2

71. **Niej;** *str. 30, (23)*: Trzeba sprecyzować o jakie n tu chodzi — zapewne miało być dla każdego n?

72. **Ozn;** *str. 30, pod (23) i dalej*: Co prawda „oba" c są tu związane kwantyfikatorami, więc formalnie można użyć ponownie tego samego „c", radziłbym jednak „to drugie" oznaczyć inną literą. Potem kolejna taka „kolizja" jest jeszcze w dowodzie.

73. **Drob;** *str. 30, linia 2. pod (23)*: "and $n \geqslant 1$" — dwuznaczne (" u corresponding to λ and for every n"). Lepiej o n napisać trochę wcześniej.

74. **Niej/Red;** *str. 30, linia nad (24)*: Bezpieczniej dodać tu, że $I \neq \emptyset$ ($\emptyset$ jest zwarty, niektórzy zaliczają go też do odcinków), bez tego nie dostaniemy równoważności samosp. z (24). Ponadto po „In particular" lepiej dodać ", under the above assumptions".

75. **Ozn; !;** *str. 31, (27)+ linia pod nim*: Należałoby jednak doprecyzować (definicja), co się rozumie przez taką jednostajną zbieżność w przypadku form kwadratowych — przecież nie chodzi tu o zbieżność n. jednost. jako ciągu funkcji na $\mathbb{R}^2$... (lecz jako obcięcia ich do kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^2$, czyli równoważnie — to def. poprzez zb. n. jednost. dla ciągu funkcji o wartościach macierzowych, dla macierzy wyznaczających odp. formy).

76. **Bł; !!;** *str. 31, Coroll. 2*: Założenia wydają się zbyt słabe. Po pierwsze, w dowodzie nie da się raczej obejść bez tzw. „oddzielenia" f od zera na każdym zwartym podzb. I — samo niezerowanie się f to za mało, a wspomniane oddzielenie od zera nie wynika z pozostałych założeń. Można to oczywiście łatwo naprawić, dodając jeszcze np. założenie ciągłości f albo ew. ciągłości rodziny form, jako funkcji „od λ". Drugi problem, to potrzebna w dowodzie ograniczoność (na odp. I) funkcji g_j z (28) — bez dodatkowych założeń jej też nie uzyskamy ...— warto pomyśleć, czy jedno z pow. wspomnianych dwóch ew. dodatkowych założeń (spełnionych we wszystkich przypadkach użycia tego rezultatu w dalszych częściach pracy) załatwia także i ten drugi problem...

77. **Drob;** *str. 32, l.2*: Brak "for any $j \in \ldots$".

78. **Ozn;** *str. 32, pierwsza linia dowodu*: N - kolizja oznaczeń!

79. **BD;** *str. 32, 5 linii dowodu przed 7.2*: Taka końcówka dowodu „traci kontrolę" nad potrzebną w (29) zbieżnością jednost. na I (np. łatwe tu do ominięcia użycie granicy górnej/dolnej, a także sama postać ostatnich szacowań z góry i z dołu). W szczególności Autor tu właśnie, z powodu „zbyt małej delikatności", zapomina najwyraźniej o potrzebie dodatkowych założeń (patrz uw. 76).

80. **Drob;** *str. 32, w 7.2 — obie formuły dot. B_n^λ*: Brakuje zastrzeżenia, że to dotyczy tylko $n \neq 0$.

81. **Drob;** *str. 33, Th.9 (b)*: Brak "for any n...".

82. **Red;** *str. 33, Th.9 (c)*: Chyba tu jednak lepiej dodać, że chodzi tu właśnie o tę niedawno zdefiniowaną (nad (30)) rodzinę — czytelnik nie ma jeszcze tej jasności w tym miejscu.

MM

83. **Drob;** *str. 33, Th.9 przedost. linia*: Lepiej: "λ, **and for** n..."

84. **Drob;** *str. 33, pod (31)*: "$\lambda \in I$ **and** n..."

85. **Niej;** *str. 33, l.-10*: Brak informacji co to jest M.

86. **Niej; !;** *str. 33, l.-9*: Chyba nie chodzi o "non-zero" tzn. niezerową, tylko o "niezerująca się" (mającą wartości różne od 0).

87. **Niej; !;** *str. 33, l.-8,-7*: non-zero? — Każde $\alpha \in S^1$ jest niezerowe...

88. **Niej; !;** *str. 34, l.1*: Przed kropką ważne by dodać: "to a limit with no-zeros" — bez tego (31) nie wyjdzie. (To subtelność czysto terminologiczna — gdyby explicite mówić o zbieżności iloczynu nieskończonego i to skalarnego, to takie niezerowanie się jest zwyczajowo częścią definicji zbieżności, tu jednak mowa o zbieżności "iloczynów częściowych" i ponadto funkcyjnych...).

89. **BD-OK; !;** *str. 34, l.1*: "To do so" — to za słabe wyjaśnienie — i dalej też brak dowodu, że zb. jednost. w (32) faktycznie wystarcza. Tu przydatny byłby "funkcyjny — jednostajny" wariant znanego wyniku, dotyczącego skalarnych iloczynów niesk. Albo należy zacytować taki ogólny wynik z literatury, albo sformułować i udowodnić jako lemat (w tej pracy używany milcząco conajmniej dwukrotnie — patrz dow. Th. 10). Nie jest to całkowicie automatyczne przeniesienie odp. skalarnego wyniku — są tam jednak pewne subtelności.

90. **Red / Niej;** *str. 34, l.-2*: To prawidłowe szacowanie, ale jedno zdanie o tym, jaki ogólny wynik dot. szacowania normy operatorowej został tu użyty, wypadało raczej zamieścić.

91. **Drob;** *str. 35, (35)*: for n...?

92. **Bł-??; !!;** *str. 35, l.4*: To chyba jedna z najpoważniejszych merytorycznych wątpliwości w przypadku tej pracy. Autor nie wyjaśnia, skąd wziął oszacowanie na $|S_{n+1} - S_n|$. Należy się jednak domyślać, że użył (33) oraz ogólnego wyniku, dotyczącego szacowania z góry modułu formy postaci

$$< CBv, v >$$

przy użyciu **(i)**: $\|C\|$ i $\|v\|^2$ oraz **(ii)**: stałej $c \geqslant 1$ takiej, że

$$\forall_{v \in \mathbb{R}^2} \quad \frac{\|v\|^2}{c} \leqslant | < Bv, v > | \leqslant c\|v\|^2$$

Faktycznie, jeśli (jak spotykamy typowo przy "kanonicznej" postaci formy symetr.) macierz B jest symetryczna, to nietrudno wykazać, że przy założeniu (ii) zachodzi

$$\forall_{v \in \mathbb{R}^2} \quad | < CBv, v > | \leqslant c\|v\|^2\|C\|.$$

To już jednak chyba nie jest prawdą, bez założenia symetri B. Tymczasem B dla rozważanego tu przypadku jest „dalekie od symetrii"... Obawiam się, że dla uratowania podobnej idei dowodu twierdzenia, będą potrzebne dodatkowe/inne założenia o wsp. macierzy Jacobiego. Być może jednak najprostszym „ratunkiem" byłby ten inny dowód (ale i nieco inne założenia...), o którym Autor wspomina (niestety jednak zbyt pobieżnie, by mieć pewność o słuszności Jego tezy...) w Rem. 7 str. 48 (wspomniana tam też nieco słabsza teza — o „j-podciągowej zbieżności" nie stanowiłaby w tym wyp. przeszkody).

93. **Bł-OK;!;** *str. 35, (36)*: Chyba nie tak powinna była wyglądać lewa strona (36), aby z tego mogła wynikać spodziewana zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego z (32). Przecież ogólnie czym innym jest warunek:

$$\exists_{D\in\mathbb{R}}\forall x \in X \quad \sum_{n=M}^{+\infty} |F_n(x)| \leqslant D,$$

a czym innym jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego o wyrazach $|F_n|$ z (32)! Ściślej, to pierwsze nie powoduje drugiego... Może to jednak tylko "literówka" i Autorowi chodziło o użycie klasycznego kryterium Weierstrassa jednost. zbieżności szeregów funkcyjnych? Wtedy w (36) zamiast modułu dla F_n powinna zostać użyta odpowiednio rozumiana norma.

94. **Niej;** *str. 35, linia 2. w Coroll. 3*: Po co "almost"? — przecież w Th. 9 rozważane funkcje są określone na zwartym I...

95. **Niej;** *str. 36, 2. linia nad (40)*: — znów nie wiemy jaki tu właściwie sens zbieżności jednost.? W odpowiednim znaczeniu — patrz uw. 75. — dla ciągów form, czy przy ustalonym (każdym) $v \in S^1$?...— nawet jeśli to równoważne, to „w matematyce" należy wyrażać się jasno.

96. **Drob; !;** *str. 36, 3. linia pod (40) i dalej dwukrotnie*: Zamiast -4 pow. być -4^{-1}.

97. **Niej;** *str. 36, 4. linia pod (40)*: niejasne jakie to ma być "conjugation", bo chyba nie o standardowe sprzężenie macierzy chodzi. Wydaje się, że tu należałoby powołać się po prostu na fakt, że $\operatorname{discr}(AB) = \operatorname{discr}(BA)$, co jest bezpośr. konsekwencją analogicznej własności zarówno dla śladu, jak i dla wyznacznika. (Patrz też dalej, np. uw. 158.).

98. **BD / Red; ew;** *str. 37, 1. linia nad (42)*: "easily veified" — wskazane byłoby jednak jakieś ułatwienie dla czytelnika — ta równość ma przecież dość głęboki sens związany z definicją odp. wielomianów ortogonalnych...— patrz też uw. 105. Ponadto chyba warto tu już wyjaśnić, że $\mathcal{B}^N = \mathcal{F}$.

99. **Red; !;** *str. 38, l.1-3*: Zmienił się pod-(pod-pod?)rozdział. Czytelnik za chwilę już się zacznie gubić w domysłach, jakie właściwie Autor przyjmuje tu założenia i oznaczenia, jako obowiązujące w obecnej części pracy. Dotyczy to np. oznaczenia nowej formy kwadratowej tu zdefiniowanej, oznaczanej jednak jak wcześniej. Proponowałbym więc tę definicję opatrzyć numerem formuły i może odwoływać się do niego co jakiś czas? Ale problem jest także z niejasnością co do tego, które założenia o wagach przyjmujemy, poza wypisywanymi dalej w sformułowaniach Propos. itp. Trzeba jakoś wyraźniej tu (lub przy każdym kolejnym Th/Prop itp) sprecyzować te założenia — jak rozumiem (już po lekturze części ciągu dalszego...) dotyczy to przynajmniej założeń:

- istnienia granic definiujących q_j i r_j (ze str. 35 pod Corol. 3),
- (37) — choć często dodanego do założeń, ale np. w Prop. 6 — nie.

(+ oczywiście także sformułowane niedawno (43), (44)).

100. **Drob;** *str. 38, linia 1. Proof*: "for each $j \in \ldots$" — trzeba przenieść conajmniej 3 linie niżej (tu jeszcze nie ma sensu).

101. **Drob; !;** *str. 38, linia 2. Proof*: Po prawej str. drugiej równości należy raczej zastąpić a_{n+N} przez a_n (dwukrotnie), sądząc po definicji macierzy $\mathcal{C}_j^\lambda$...

MK

102. **Drob**; *str. 38, l.-9*: "almost unif." — patrz uw. 95.

103. **Drob**; *str. 38, l.-5*: — patrz uw. 96.

104. **Bł-OK/Red**; !!; *str. 39, końcówka tezy od (46)*: (46) zostało zapisane błędnie — co prawda zachodzi przy założeniach Prop. 7, ale nie wystarcza już do uzyskania niemal jednost. zb. w (48) (wskazuje to przy okazji na błąd/nieostrożność przy przeprowadzaniu dowodu niżej...). Prawidłowy warunek powienien mieć taką postać:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{\lambda \in I} \|\tilde{C}_{n+1}^{\lambda} - \tilde{C}_n^{\lambda}\|,$$
czyli najpierw sup. po λ, potem dopiero sumowanie po n. Zatem być może i tu, i w innych miejscach pracy, warto byłoby jednak używać ciągów, których wyrazy to funkcje zmiennej np. λ (czasem λ i α) o wartościach macierzowych, wektorowych, skalarnych, itp., traktowane jako wektory z odpowiedniej przestrzeni Banacha X (z odpowiednią normą „sup"). Można by się wtedy również posługiwać symbolem ν_N w takim szerszym sensie dla X.

105. **Red**; *str. 39, Proof — linia 1.*: Bardziej już (42), niż (7), choć prawidłowiej byłoby sformułować jeden Fakt, z którego wynikałoby i (42), i to, co we wzorze poniżej — patrz także uw. 98.

106. **Niej**; *str. 39, l.-6.*: "converges **almost unif.** to..."

107. **Bł-OK**; !; *str. 39, l.-3.*: Wydaje się, że błędne jest powoływanie się tu na "mean value th.", albo wymaga to bardziej szczegółowych wyjaśnień. Opisane szacowanie da się natomiast uzyskać dość prosto, dzięki temu, że mamy tu do czynienia z wielomianem. Ponadto osobno należałoby rozpatrywać przypadek ew. $\lambda = 0$, gdyby jednak opierać się na m.v.t.

108. **BD**; **ew.**; *str. 39, l.-1.*: "Therefore", to tu zbyt lakoniczne wyjaśnienie — trzeba również użyć podobnych szacowań, jak wyżej, dla w_N, w_{N-1}.

109. **Bł**; !!; *str. 40, (50)*: Błędne sformułowanie (choć wynik prawdziwy...) Patrz uw. 104. Nie taka teza jest potrzebna potem, przy wykorzystaniu w dowodzie Tw. 10. Trzeba zmienić — i sprawdzić, czy ten mocniejszy wynik da się uzyskać...

110. **Niej**; !; *str. 41, l.1-2.*: Należy wyjaśnić, jak to rozumieć, gdy brak pierwiastków rzeczywistych (wtedy nic nie odejmiujemy od $\mathbb{R}$, a $\lambda_{\pm}$ nie mają sensu).

111. **Ozn**; *str. 41, wokół (53) i dalej wokół (54)*: Proponuję jednak użyć innych niż c symboli na te nowe dwie stałe.

112. **BD-OK**; *str. 41, (53)*: Wypadałoby jednak powołać się tu na (12) dla dowodu tej nierówności.

113. **Drob**; !; *str. 42, linia 2. pod form. (55)*: raczej "supremum **norm**".

114. **Niej**; !!; *str. 42, formuły od (56) do(59)*: -raczej nie o to chodzi — patrz uw. 109.

115. **Drob**; *str. 42, l.-2*: "and (b) and **(c)**".

116. **BD / Red / Niej; !!;** *str. 43 l.1*: "consequence of..." — z tą argumentacją jest kilka problemów. Po pierwsze, chyba należy dołączyć (53). Po drugie raczej nie chodzi o Prop. 8, które dowodzimy właśnie, lecz o Prop. 7. Jednak tam są mocniejsze założenia dla ciągu odwrotności wag a_n — tam jest ν_1, nie ν_N. Jest tam jednak także teza w wersji ν_1. Zapewne więc da się ten problem ominąć, poprzez rozważanie dla odpowiedniego ciągu (tego, o którym mowa w (58)) jego podciągów "co N, z resztą j". Jednak w tej sytuacji wyjaśnienia Autora muszą być znacznie bardziej szczegółowe — nie można wymagać od czytelników aż tak detyktywistycznch zapędów... W szczególności też, odpowiednią formułę na ν_1 dla takich podciągów należy jawnie wypisać. I dochodzi jeszcze problem z uw. 109...

117. **Ozn;** *str. 43, l.7*: Ten nowo zdef. symbol jest nieco zbyt podobny do tego z (49).

118. **Niej;** *str. 43, l.9*: "it is enough..." — dlaczego? — Należało tu przynajmniej jawnie wypisać związek prawej strony tego wzoru z lewą stroną (55).

119. **Drob;** *str. 43, l.10*: Chyba $+q$ $(= -(-q))$ po lewej stronie wzoru.

120. **BD; !!;** *str. 43, (61) i 1. oraz 2. linia niżej*: Tu problem z użyciem Prop. 7 ten, co opisany w uw. 116. I można sobie poradzić z nim "na podciągach", tak jak opisane w tamtej wcześniejszej uwadze, jednak powstaje drugi problem: niezależności granicy od j... Wydaje się to możliwe do uzyskania poprzez modyfikację samego Prop. 7. Jak się zdaje można tam uzyskać część drugą tezy (o istnieniu i postaci jednost. granicy w (47)) nawet bez spełnionego założenia (b)...

121. **Red / BD-OK;!!;** *str. 43, (62) i jedna linia nad*: Te lakoniczne wyjaśnienia dlaczego zachodzi (62) są także źle zredagowane — przydałby się tu przedstawiony explicite rachunek z przyzwoitymi odwołaniami do tego, z czego należy skorzystać. Np. samo $\mathcal{BCB}^{-1} = \mathcal{C}$ wymaga użycia (47), a wzór na $\mathcal{B}^N$ można było wcześniej wypisać i oznaczyć numerem przy okazji rachunków w połowie str. 39. (a lepiej wcześniej i potem po odp. oznaczeniu, odwołać się do niego w obu potrzebnych miejscach). Autor powinien uzmysłowić sobie, że czytelnik nie koniecznie musi pamiętać, co w którym momencie zostało w pracy zdefiniowane. Szczególnie przy tekście matematycznym tak złożonym i bogatym w podobne do siebie oznaczenia. — Te ostatnie dwa zdania odnoszą się też ogólnie do problemu bardzo „nieprzyjaznego" dla czytelnika sposobu zredagowania całości tej pracy... Gdyby za rok-dwa Autor zechciał przypadkiem sam przeczytać (i zrozumieć) ktoryś ze swych tutejszych własnych dowodów, przekonałby się o tym boleśnie...

122. **I;ew.;** *str. 44, 2 linie pod (63)*: Zamiast (63) łatwiej chyba użyć (42) i wzoru na macierz odwrotną (2×2), bo tu wyznacznik jest równy 1.

123. **BD-OK;!;** *str. 46, l.1–2*: Te wzory na $w_k(0)$ wymagają dowodu — chyba najszybciej jest użyć rekurencyjnej definicji tych wiel. ortogon.

124. **Drob; !;** *str. 46, l.2*: $\mathbb{N}$ zamiast $\mathbb{Z}$.

125. **Red; ew.;** *str. 46, przed sformułowaniem Th. 10 lub w nim*: Chyba lepiej byłoby przypomnieć, jakich to dotyczy q.

126. **Red; ew.;** *str. 46, po (e) w Th. 10*: I chyba lepiej byłoby powołać się na wzór definiujący $\lambda_{\pm}$.

127. **Red; ew.;** *str. 46, linia 3. dowodu*: "by (22) **with Q_n^λ defined by...**"

MH

128. **Red; !**; *str. 46, linia 3. i 5-6. dowodu*: Należy zmienić szyk: "By Propos. 8..." musi się pojawić wcześniej!

129. **BD; !**; *str. 46, l.-1*: patrz uw. 89.

130. **Red; ew.**; *str. 48, l.1*: "by (50)" (— ale (50) w wersji poprawionej — patrz uw. 109.) lepiej byłoby: "by Proposition 8 (see (50))".

131. **Red / Niej**; *str. 48, l.1*: *— patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji —* wzór (52) to formuła ze środka dowodu Prop. 8 — to nieeleganckie! Ponadto tu raczej potrzebne nie samo (52), a jego wariant dla odwrotności odp. ciągu oraz podobny wariant (53).

132. **BD; ew.**; *str. 48, linia 1. w Rem. 7.*: "could" — wymagałoby dowodu (szczególnie wobec kłopotów z dowodem Th. 9. — patrz uw. 92.)

133. **Niej; !!**; *str. 48, akapit po Rem. 7.*: By można było mówić o użyteczności ciągów $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ dla „naszych" celów (macierze Jacobiego) trzeba jeszcze pamętać o dodatniości ciągu „wag" — tzn. brak wśród zał. o $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ założenia: $\tilde{a}_j > 0$ dla $j \in \{n \in \mathbb{N} : n < d\}$. Ponadto raczej należy się tu ograniczyć do $d \in \mathbb{N}$, ponieważ inaczej np. $d + 0 \notin \mathbb{N}$, mimo że $0 \in \mathbb{N}$.

134. **BD; ew.**; *str. 48, l.-11. i -10.*: "easily" — raczej przydałby się dowód...

135. **Red / Niej;!**; *str. 48, Prop. 9.*: Pierwsze zdanie akapitu po Rem. 7. sprawia, że czytelnik gubi się znów w tym, co de facto zakładamy w Prop. 9. — Czy obowiązuje więc tu założenie, że a i b spełniają zał. Th. 10.? — Jak widać z dowodu Prop. 9. — takiej potrzeby nie ma — należy to wyjaśnić.

136. **Red; !**; *str. 48, Prop. 9.*: W tezie należy dodać, że $\tilde{a}$ będzie dodatni — patrz uw. 133. (I później w dowodzie zwrócić na to uwagę, że podana konstrukcja to spełnia).

137. **Ozn; !**; *str. 49, l.2.*: Choć łatwo odgadnąć, ale brak definicji $\tilde{p}$.

138. **Red / BD-OK;ew.**; *str. 49, l.-1.*: "completes" — ściślej to nie koniec... Konstrukcja była bowiem „implikacją z tezy", przy założeniu, że teza jest spełniona... Należy więc jeszcze sprawdzić, że skonstruowane ciągi spełniają warunki z tezy.

139. **Red / Niej**; *str. 50, l.5.*: "...of part 3 of the thesis." — dziwi więc, że w cz. 3. Autor na powyższą uwagę i Prop. 9 w ogóle się nie powołuje. Jak więc rozumieć tę uwagę? Jedynie jako inspirację? Szansę na powodzenie metod z cz. 3?

140. **Ozn; ew.**; *str. 50, Ex. 7.*: Użycie oznaczenia $\tilde{a}$ w tym kontekście kompletnie różnym od użytego przed chwilą jest pomysłem bardzo złym. Więcej szacunku dla czytelnika...

141. **BD-OK / Red; !!**; *str. 50, po Ex. 7.*: Całkowity i zdumiewający brak dowodu! — samo użycie nazwy "Example" nie zmienia faktu, że jest to jednak twierdzenie... Co gorsza ten jak i dalsze dowody wymagają sporo technicznej (i niezbyt atrakcyjnej) pracy, którą Autor powinien był przemyśleć, a następnie uprościć, budując „małą teorię" złożoną z abstrakcyjnych wyników dla ciągów skalarnych klasy "ν_N" (tj., o skończonym ν_N) i służących maksymalnemu uproszczeniu dowodów z podrozdz. 8.

142. **BD-OK; !!**; *str. 51, po Ex. 8.*: — jak w uw. 141.

143. **Niej; !;** *str. 52, pod koniec założeń Ex. 9.*: Tu równiez zakładamy N -okresowość ciągu o wyrazach d_n; należy też założyć, że wszystkie $a_n > 0$.

144. **BD-OK; !!;** *str. 52, po Ex. 9.*: — jak w uw. 141.

145. **Red; ew.;** *str. 52, w Ex. 10.*: Czy nie należałoby w tezie tu (i w podobnych przykł. dalej) wspomnieć o samosprzężoności A?

146. **BD-OK; !!;** *str. 52, po Ex. 10.*: — jak w uw. 141.

147. **Drob; !;** *str. 53, po (d)* : Autor zapomniał o potrzebnym tu założeniu, że wszystkie $\alpha_n > 0$.

148. **BD-OK; !!;** *str. 53, po Ex. 11.*: — jak w uw. 141.

Part 3

149. **Ozn; ew.;** *str. 56, l.3 i dalej*: Po co ta kłopotliwa dla czytelnika zmiana ozn. z B_n^x na $B_n(x)$ (por. np. str. 32)? Jednak tekst *Rozprawy* powinien stanowić jedno, mimo, że opiera się na trzech pracach. Swoją drogą, to drugie ozn. jest popularniejsze.

150. **Ozn; ew.;** *str. 56, w (75) i dalej*: J. w.— po co zmiana ozn. z X_n^x na $X_n(x)$?

151. **Ozn; ew.;** *str. 57, l.2 i dalej*: Kolizyjne ozn. zbioru E, użyte tu także powszechnie dla ustalonej macierzy 2×2.

152. **Drob; ew.;** *str. 57, l.6*: O co właściwie chodzi Autorowi z (cf. (78))?

153. **Niej;** *str. 57, l.6*: Skoro mowa o "density" — powstaje pewna niejasność terminologiczna (są dwa zwyczaje): czy należy rozumieć tu automatycznie, że miara jest absolutnie ciągła, czy też chodzi tylko gęstość dla jej części a.c.? - W tym wypadku chodzi o to pierwsze, warto chyba dla pewności powtórzyć informację z poprz. rozdz., że ta miara jest absolutnie ciągła.

154. **Red;** *str. 57, w (77)*: Raczej szyk: discr . . . , where $\mathcal{F}$. . .

155. **Drob;** *str. 57, l.-4*: Raczej $|g|$, nie $|g(x)|$ — chodzi przecież o funkcję, nie o jakąś jej wartość w x.

156. **Drob; !;** *str. 58, w (80)*: Pow. być $k \geqslant 1$ (dla $k = 0$ definicja była już wyżej).

157. **Ozn; !;** *str. 58, w (81)*: Symbole $\mathcal{F}_K$, E_K, g_K nie zostały jeszcze zdefiniowane, dwa ostatnie są, ale dopiero pod (82). . .

158. **Niej / BD-OK; !;** *str. 58 pod (81)*: "are conjugated" — to ma wiele znaczeń — o jakie chodz tu? (w tym wypadku te dwie macierze różnią się szykiem mnożenia...). W każdym razie potrzebny jest dowód.

159. **Drob; ! + ew.;** *str. 58, w (82)*: Przed = brak „(x)"; ponadto nieco bezpieczniej może dodać duże nawiasy pomiędzy „=" a „." lub inaczej ujednoznacznić sens prawej strony (np. mniejszy odst. po symb. skróconego iloczynu).

MK

160. **Niej / BD-??; !!;** *str. 58, l.-9*: „in the weak $-^*$ topology" — to jest niestety niejasne. Może chodzi tu o jakiś żargon, używany w kregach "wielomianowo-ortogonalnych"? Tymczasem należało użyć pojęć dostatecznie szeroko stosowanych lub odwołać sie do pojęć i twierdzeń z zacytowanej explicite literatury, o ile takie twierdzenia się za tym sformułowaniem kryją.
Dodajmy, że gdyby faktycznie chodziło o słabą $-^*$ topologię, tj. $\tau(X^*, X)$ w ścisłym tego pojęcia znaczeniu, to musiałoby to dotyczyć jakiejś konkretnej przestrzeni X? — Jakiej? — Nie widać chyba żadnego „ewidentnego kandydata" na X... Miary tu rozważane musiałyby być elementami X^* (z dokładnością do odpowiedniego utożsamienia miar i elementów X^* poprzez całkę). Natomiast przestrzeń X(Banacha, Frécheta, inna...?) powinna zawierać m. in. wielomiany na $\mathbb{R}$ i przy tym powinny one stanowić na tyle „istotną" (czy gęstość byłaby wystarczająca?) podprzestrzeń w X, by zbieżność „na nich" skutkowała zbieżnością na każdym elemencie X. A w końcu, z tej zbieżności „in the weak $-^*$ topology" musiałoby wynikać, że dla każdego podzbioru Borelowskiego ω zachodzi $\mu_K(\omega) \longrightarrow \mu(\omega)$. — To właśnie jest bowiem wykorzystywane w dalszej części dowodu, a wręcz stanowi jego podstawę, podobnie w następnym twierdzeniu.
Liczę trochę na to, że ostatecznie chodzi tu może jednak o jakiś wynik z zakresu Teorii Wielomianów Ortogonalnych dobrze znany Autorowi (a mnie nie... — nie jestem specjalistą w tej dziedzinie) i wyjaśnienie tej sprawy jest tylko kwestią podania właściwego cytowania...

161. **Niej / Red; !;** *str. 58, l.-8*: "it is sufficient to show..." — to nie jest prawda, potrzeba dowieść jeszcze znacznie więcej! Miedzy innymi: a) istnienie granicy z (78), b) ciągłość $|g|$, c) dodatniość $|g|$.

162. **Drob;** *str. 58, l.-2*: show**S**...

163. **Drob;** *str. 59, l.3 (i dalej często)*: "almost" jest już niepotrzebne — patrz ustalenie terminologii przez Autora „przed chwilą" (pod (83)).

164. **Drob; !;** *str. 59, l.4*: Powinno być: "the numerator of the RHS of (81)..."

165. **Niej / Red; !;** *str. 59, l.4 i 5*: "converges" — ta zbieżność potrzebna będzie dalej jednostajna; ponadto szyk argumentacji zły: najpierw trzeba "ustalić" sprawę "granicy" zbiorów E_K. Następnie dopiero, wywnoskować z tego, że (przy ustalonym $I \subset \mathbb{R}$) dla dostatecznie dużch K (niezal. od x) owa RHS (powyżej) ma w ogóle sens i „zbiega jednostajnie" do $\sqrt{\cdots}$.

166. **Ozn; ew.;** *str. 59, l.5*: pojęcie granicy dolnej jest dość powszechnie znane dla ciągów zbiorów, przy „ciągłej rodzinie" definicji można się domyslić, lepiej jednak ją podać.

167. **Niej-OK /Red / Ozn; !;** *str. 59, zdanie „wokół" (86)*: To mocno nieścisłe - de facto nie chodzi tylko o samo (83) lecz o więcej — patrz uwaga 161. I aby to wszystko razem uzyskać, wystarczy chyba dowieść tylko dwie rzeczy: (i) jednostajną zbieżność: $g_K \xrightarrow[\text{jednost.}]{K} g$; (ii) g nie przyjmuje wartości 0 na I. To da ciągłość g, „oddzieloność g od 0" (więc ograniczoność $1/g$) i w konsekwencji wspólną ograniczoność wszystkich funkcji $1/g_K$, dla $K \geqslant K_0$... i dalej, jednostajność zbieżności odp. funkcji podcałkowych...). Patrz też uwaga 155.

168. **Niej/Ozn; !;** *str. 59, l.11 i 12*: Niestety użyte tu S_n nie w pełni odpowiada temu, z podrozdziału 7 pracy, choć jest z nim bardzo blisko powiązane. Tu już nie ma zmiennej α, a co gorsza, warunki początkowe nie spełniają na ogół tego, co owe α - tzn. nie należą do okręgu jednostkowego. Co więcej - są zależne od x (choć „niezbyt groźnie'...). To zatem jednak kolizja oznaczeń. A co jeszcze

ważniejsze — także konieczność dodatkowej argumentacji, przy kilkakrotnym w tym dowodzie (np. w miejscach, do których odnosi się aż 5 następnych uwag) korzystaniu z wcześniej uzyskanych własności tej „innej rodziny funkcji S_n".

169. **Red-OK; !**; *str. 59, nad (87)*: — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — wzory (33), (34) to formuły ze środka dowodu Tw. 9 — to nieeleganckie, kłopotliwe w czytaniu. A skutek formalny tego „zabiegu": powoływanie się na nie wymagałoby sprawdzania wszystkich założeń tego tw. (i być może jeszcze dalszych, uczynionych w samym dowodzie. . .).

170. **Red-OK; !**; *str. 59, l.-4*: — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — wzór (35) to także formuła z dowodu Tw. 9 — patrz uwaga pow. Co gorsza, tu już nie tylko formalnie, ale i faktycznie trzeba sprawdzić odpowiednie założenia, w szczególności pewnie trzeba by odwoływać się też do Prop. 5 (i dowodzić spełnienie jego założeń).

171. **Niej; !**; *str. 59, l.-3*: ale tę nierówność (na $|S_K(x)|$) dostajemy nie dla wszystkich K, lecz tylko „dla K dost. dużych".

172. **Red-OK; !**; *str. 60, l.1*: — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — wzór (36) to znów formuła ze środka dowodu Tw. 9 — analog. jak w uwadze 170. Dodatkowo: w dowodzie Tw. 9 jest błąd (luka? — patrz uwaga 92.) — właśnie jeszcze przed (36) bezpośrednio. Pytanie więc o aktualność takiego argumentu po ew. naprawie tamtego błędu. . .

173. **Ozn; !**; *str. 60, l.6 i 7*: "lim . . . = lim . . . uniformly. . . " takiego pojęcia, czy symbolu chyba nie ma w powszechnym obiegu — co Autor ma tu na myśli (i dlaczego to zachodzi)?

174. **Red; ew.**; *str. 60, Tw. 13 (a)*: przy obecnym początku sformułowania tego tw. definicja q jest nieco spóźniona (q użyte było już wyżej). Albo trzeba przenieść ją wyżej, albo od biedy "Let" nad (a) zmienić na "where" (ale po przecinku, nie kropce. . .).

175. **Drob;**; *str. 60, l.-2*: patrz analogiczna uwaga 155.

176. **Niej / BD;!!**; *str. 61, początek dowodu*: - tu użyta więc ta sama niejasna argumentacja, o której mowa w uwadze 160. i którą niezbędnie należy wyjaśnić.

177. **Niej / Red; !**; *str. 61, zdanie wokół (88)*: "it is sufficient to show. . . " — patrz podobna uwaga w poprzednim dowodzie (161.). Znów tu dowód powinien być inaczej zaplanowany/zorganizowany i faktycznie, poza wymienionymi kwestiami, potrzeba dowieść jeszcze m. in.: istnienie granicy dającej $\tilde{g}(x)$ oraz fakt, że $I \subset E_K$ dla dost. dużych K.

178. **Niej; ew.**; *str. 61, druga lin. po (88)*: "convergent" — sens lepiej doprecyzować.

179. **Drob**; *str. 61, trzecia lin. po (88)*: "computing" - de facto wynik tego wyliczenia nie pojawia się dalej w formie podanej explicite.

180. **Red / Niej; !**; *str. 61, trzecia lin. po (88) i aż do (89)*: "formula (55)" — po pierwsze — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — (55) znajduje sie w środku dowodu Prop. 8. . . . Ponadto, raczej tu akurat nie używa się w ogóle (55) lecz po prostu należałoby użyć definicji odp. macierzy z (89), gdyby zostały one zdefiniowana analogicznie, jak w definicji (49). . . — ale patrz uwaga kolejna. . .

MM

181. **Ozn; !;** *str. 61, (89)*: Autor znów zapomina o zdefiniowaniu użytych oznaczeń (np. C_n^K, X_n^K, choć podaje nieco dalej def. bardziej „elementarną” — dla C_n...). Można się tych def. domyślać, to jednak nie wystarczy!

182. **Red; ew.;** *str. 61, (90)*: Często nie jest dobrym rozwiązaniem taki typ rozbijania pewnych faktów/własności na części i oznaczanie tylko pewnych jego fragmentów numerowanym odnośnikiem „do równania”. Tu konkretnie chodzi o wiecej niż widać w samym (90) — powyżej jest mowa o zbieżności jednostajnej (a sam wzór (90) - to tylko punktowa...). Jednak później (str 62), powołując się na (90) Autor ma jednak na pewno na myśli całość - z jednostajnością włącznie... W takiej sytuacji ta „jednostajność” musi się znaleźć również w wyróżnionym wzorze (90) (sposóbow na to jest wiele). Analogiczna uwaga dotyczy wielu podobnych nieprecyzyjnych odniesien do “formuł” w pracy, również wczesniejszych — patrz np (29), (32).

183. **Drob; !;** *str. 61, druga lin. pod (90)*: Brak (x) za X_K.

184. **Ozn; !;** *str. 61, ostatnie ok. 25% strony*: Znów (por. 181.) brak definicji... — tym razem dwóch obiektów z „falkami”...

185. **Niej; ew.;** *str. 61, l.-3 — ostatni •* : Tu pewna nieścisłość (może wynik dość niejasnego określenia “involves”, wyżej) — stosując się do (55) (patrz jego ostatnia linia) uzyskamy dodatkowy współczynniki liczbowy (w formie ilorazu) przed macierzą z lewej strony, zatem z prawej strony także uzyskamy nieco co innego.

186. **Red-OK; !;** *str. 62, l.7*: “by (60)” — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — znów: (60) znajduje się wewn. dowodu Prop. 8....

187. **BD-OK / Red; !!;** *str. 62, pierwsza linia po (92) i dwie kolejne*: Dowód jednostajnej zbieżności dot. linii 2. po (92) wymaga jednak nieco dokładniejszych rachunków, niż tu przedstawione. Ale już stwierdzenie “This completes the proof of (90)” jest raczej nadużyciem! Rozumiem dobrze, że dowodzenie szczegółów tego zawiłego dość “algebraicznie ” problemu nie jest dla Autora zbyt atrakcyjne (bo sam, sprawdzając niniejszą rozprawę musiałem się z tym uporać...), ale stanowczo fakt ten jednak wymaga przyzwoitego i **spisanego** dowodu, a takiego tu nie ma.... Te, jak się zdaje pierwotnie, zawiłe rachunki dają się przy pewnej pomysłowości zredagować w miarę zwięźle i nawet elegancko — tyle, że wymaga to wysiłku i m.in. sformułowania kilku dość ogólnych lematów, dotyczących zbieżności jednostajnej pewnych ciągów iloczynów macierzy. Tego typu lematy pozwoliłyby zresztą znacznie przejrzyściej argumentować w kilku innych miejscach pracy.... Natomiast to, co opisał Autor do tego miejsca +/- od połowy str. 61 jest conajwyżej bardzo „zgrubną” (nie mylić ze „zgrabną”...) ideą dowodu (i niestety niezbyt komunikatywnie zaprezentowaną). — Patrz też uw. 182.

188. **Niej / BD-OK; !;** *str. 62, 4 linie nad (93)*: - znów “are conjugated”— patrz uw. 158.

189. **BD-OK / Red; !!;** *str. 62, zdanie wokół (93) i następne*: Znów, uznanie tego za dowód nie jest możliwe. Co gorsza, stwierdzenie, że do uzyskania (93) wystarczy użyć (90), (65) (tym razem — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — to formuła z dowodu Prop. 8) oraz Corol. 4 raczej zaciemnia zrozumienie. Pominięto na tej „liście” wiele innych ważnych argumentów, które należy użyć (np. (62)...). A faktycznie jest tu dużo dość żmudnej „technicznej pracy”, którą Autor “zwyczajnie”

opuścił. Ponadto jest w tych trzech liniach spory bałagan: np., czy nie potrzebna jest tu zbieżność jednostajna? (na I)? — nic o tym nie jest wspomniane; mianownik ostatniego ułamka z (93) nie został jeszcze zdefiniowany. Autor podaje definicję $\tilde{g}^j$ przez omyłkę dopiero później (nie wyjaśniając nawet, z czego wynika istnienie definiującej to granicy). Przy próbach samodzielnego ułożenia dowodu tej części okazuje się, że de facto, by dowód ten przeprowadzić, trzeba się na nowo wczytać w spore fragmenty dowodu Prop. 8. — To wszystko oznacza, że zarówno samo sformułowanie jak i dowód Proposition 8 należałoby zreformować, tak by uzyskane w tamtym podrozdziale wyniki mogły być bezpośrednio użyte (a nie ich dowody...). Podobnie, te 5 linii „dowodu" należy bardzo rozwinąć i zaprezentować prawdziwy dowód!

190. **BD-OK / Niej; !!;** *str. 62, zdanie wokół (94) — do pocz. str 63.*: Tu kontynuacja bardzo nieprecyzyjnego, zagmatwanego dowodzenia z poprzedniej uwagi. Wyjaśnienie dlaczego „(88)" (ściślej — patrz uwaga 177.) będzie rzeczywiście wynikało z jednost. zbieżności w (94) wydaje się być niełatwe — wymagające kilku kroków dość subtelnego, bynajmniej nie oczywistego, dowodu...

191. **Drob / BD / Bł-??; !!;** *str. 63, l.1 i 2*: Zapewne miało tam być "by (93), (94)...". W każdym razie, znów lakoniczne stwierdzenie z tego zdania wymaga dłuższej argumentacji, którą Autor konsekwentnie pomija. Ponadto nie widać (ściślej — ja nie widzę...[3]) wystarczających argumentów za tym, że rzeczywiście wszystkie $\tilde{g}^j(x)$ są równe ($= \tilde{g}(x)$). To zaś, co zdaje się być możliwe do uzyskania po dłuższym dowodzie, to jedynie równość ich wartości bezwzględnych (i to zresztą wystarcza dla potrzeb dowodu twierdzenia).

192. **Drob; !;** *str. 63, (95)*: w środkowej części wzoru, przy $C_n^K(x)$ i w liczniku, i w mianowniku brak przy $a_{\dots}$ górnego indeksu K.

193. **BD-??; !!;** *str. 63, pod (95)*: Ostatnia równość w tej linii nie jest wykazana i nic dziwnego — wydaje się być bowiem fałszywa. Na szczęście, w dalszym dowodzie nie jest ona w ogóle potrzebna...

194. **Bł; !!;** *str. 63, pod "Then (95) forces"*: To wygląda na błędne szacowanie — najwyraźniej Autor skorzystał z „równości" $C_K^K(x) = C_{K+N}^K(x)$ — raczej błędnej — zresztą patrz 6 linii niżej — wzór na $C_{K+N}^K(x)$... Tym razem to błędne szacowanie jest co prawda użyte w dalszym rozumowaniu, ale ten błąd daje się naprawić. Prawidłowe, nieco słabsze szacowanie, uzyskane właśnie przez w.w. wzór na $C_{K+N}^K(x)$, również wystarcza do przyszłych potrzeb.

195. **Red-OK; !;** *str. 63, w "Formula (68) shows"*: *— patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji —* znów: (68) znajduje się wewn. dowodu Tw. 10. I podobnie należy wyjasnić problem związany z nieco innym znaczeniem symbolu S_n tu niż w (68) — por. uw. 168.

196. **Drob; ew.;** *str. 63, w "Therefore by (84)"*: Chyba chodziło raczej o (91).

197. **Drob / BD-OK; ew.;** *str. 63, linia "which by (90)-(92)...."* : Chyba chodziło raczej o (c) (+ Prop. 8), niż (b). Ponadto, to zdanie zbyt skrótowo próbuje zastąpić dowód jednostajnej ograniczoności.

198. **Red; ew.;** *str. 63, l.-6*: *— patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji —* "formula (69)" jest częścią dowodu tw. 10. I w związku z tym, próba jej użycia „uruchamia" konieczność sprawdzania całego „łańcucha" kolejnych założeń do sprawdzenia...

[3] co może „dowodzić" nie tylko mojej indolencji, ale również konieczności przyzwoitego pisania dowodów przez autorów prac, którzy chcą czytelnika o czymś przekonać...

199. **Drob / Red**; !; *str. 64, l.2*: "It shows (94)" — należy dopisać "uniformly" (on I, ew. almost unif.) lub patrz uwaga 182.

200. **Drob**; *str. 64, l.5*: "n-th".

201. **Drob**; *str. 64, nad Corol. 5*: "...than **in** Theorem..."

202. **Red / BD-OK**; !; *str. 64, l.-5*: Samo stwierdzenie "by Corollary 2" jest zbyt skótowe, jako dowód poniższej równości. Trzeba tu więcej napisać w jaki sposób to Coroll. stosujemy i dlaczego wówczas są spełnione jego założenia. Wydaje się, że do uzyskania celu potrzebne będzie użycie w odpowiedni (jaki?) sposób np. również Coroll. 3 i Prop. 5.

203. **Red / BD-OK**; !; *str. 64, l.-3*: To uwaga analogiczna do powyższej — trzeba wypisać znacznie więcej szczegółów sprawy korzystania z Tw. 12. M. in. należy też wyjaśnić (znów — patrz uw. 168.) pojawiające się i tu problemy innej niż we wcześniejszych rozdziałach definicji S_n.

204. **BD-OK / Red**; !!; *str. 65, cały dowód Coroll. 6*: To, co tu przedstawiono nie jest dowodem, nawet trudno nazwać to szkicem. Dość losowo wybrano tylko niektóre wskazówki czego można użyć w dowodzie. Jednak faktyczny dowód wymaga sporo rachunków opartych na kilku wynikach z poprzednich rozdziałów i, co za tym idzie, sprawdzania licznych założeń po drodze. A w tym, wielu wyników niewymienionych w „Dowodzie". Tych ważnych „szczegółów" nie wolno przemilczać. Widać tu, że gdyby Autor lepiej przemyślał sposób zredagowania poprzednich rozdziałów, teraz miałby eleganckie narzędzia do uczciwych dowodów w tym rodzaju i nie musiałby się uciekać do podobnych "uników". Inaczej mówiąc, **poprzednie rozdziały mają faktycznie spory potencjał, który jednak należało lepiej ujawnić!** Przejdźmy do konkretnych, potrzebnych tu rezultatów. Już sam dowód faktu z pierwszego zdania, o granicy jednostajnej dla „C_n-ów" wymaga w istocie użycia najpierw Prop. 7 do podciągu postaci $\{a_{kN+s}\}_k$ ciągu wag przy ustalonych „resztach" s i skorzystania z uzyskanego tą drogą wyniku (por. uw. 116.). Później trzeba odwołać się w odpowiedni sposób do Coroll. 2. Czeka nas niestety sporo pracy przy sprawdzaniu jego założeń — tu faktycznie przyda sie zapewne wspomniane przez Autora (50) ... W dalszym ciągu dowodu również trzeba będzie użyć należycie: Coroll. 4, Prop. 8., Th. 10, Th. 13. (Autor wymienia tylko to ostatnie). Naprawdę, trudno oczekiwać od cztelnika, że sam na podobną drogę wpadnie i sprawdzi wszystkie szczegóły po drodze na własną rękę ... Podkreślam jednocześnie, że nawet ten mój powyższy opis daleki jest jeszcze od czegoś, co można by ew. nazwać „szkicem dowodu". Ponadto znów — *patrz uwaga ogólna 1. w części 1. recenzji* — (odwołanie do (61)).

205. **BD**; !!; *str. 65, dowód Coroll. 7*: W tezie jest mowa o niemal jednostajnej zbieżności. Zapewne zatem nie wystarczy użyć standardowego tw. Stolza, ale potrzebny byłby jakiś jego „jednostajny wariant" — brak tu sformułowania i dowodu takiego wariantu (lub odp. cytowania z literatury) oraz sprawdzenia ew. potrzebnych założeń.

206. **Red**; *str. 65, l.-6 i -5*: To interesująca uwaga. Choć jednak może tu nieco zbyt duża część wyjaśnień przerzucona została do cytowanej literatury. Sugerowałbym (nie bardzo „twardo"), że szczególnie ogólny sens odpowiednika lewej strony (96) w owym przypadku "the unit circle" można by chyba czytelnikowi ujawnić choć trochę bardziej explicite (— zapewne w tej uwadze chodzi też o jakiś operator, choć już nie o macierz Jacobiego i nawet nie samosprzężony...).

MM

207. **Ozn; ew.**; *str. 66, (97) i dalej*: Zwyczajowo / typowo / na ogół notacja matematyczna używana w wyróżnionych formułach (i omijająca pisanie kwantyfikatorów explicite) jest w przypadku formuły postaci:

„warunek W z parametrem",   „warunek Z ograniczający zakres parametru"

traktowana jako użycie kwantyfikatora ogólnego (tzn. „dla każdego parametru z wyróżnionego przez Z zakresu zachodzi W"). Dlatego zastosowany tu zapis dla κ jest mylący. I na tej stronie jeszcze dwukrotnie.

208. **Drob; !**; *str. 66, (98) i dalej*: Pod sumą z mianownika pow. być a_k. I tak samo ok. pół strony niżej.

209. **Drob; !**; *str. 66, l.11*: W "it can be" słowo "it" jest już raczej „anglistycznie" niedopuszczalne — zapewne chodzi o „odległą" już zanadto granicę z (98).

210. **Niej;** *str. 66, l.-8 i -7*: "Observe that... " — ale ostrożnie: czy nie może się zdarzyć, przy "critical case", że $0 \in \operatorname{supp} \mu$?

211. **Ozn;** *str. 66, (C_6) i dalej*: Nie jest o tym wspomniane, ale domyślam się, że oznaczenia formuł (C_j) to przeniesienie oryginalnej numeracji z pracy [28] (?). Może jednak, przez szacunek dla czytelnika, można było przytoczyć już wszystkie cytowane tu warunki (C_j)? — brakuje tylko (C_3).

212. **Niej; ew.**; *str. 67, zdanie przed "11. Examples"*: W tej uwadze nie jest jasne, jak właściwie autor zamierza stosować Coroll. 7. Chyba raczej na podstawie założeń Coroll. 6 (nie 7)? Ale wówczas N powinno być parzyste, a „wygląd" założenia sugerowałoby tu, że chodzi o $N = 1$. Zapewne więc chodziło tu o to, że „$\nu_1(\cdot) < +\infty \implies \nu_2(\cdot) < +\infty$" i ma być $N = 2$? Jeśli tak, warto to było napisać.

213. **I;** *str. 67, pierwsza linia w "11. Examples"*: „Ilustracja" — zgoda, ale "numerical" — to tu troszkę przesada. W tym podrozdziale nie ma przecież żadnych wyników matematycznych w stylu np. oszacowań błędów przedstawionych komputerowych wyliczeń.

214. **Niej; !**; *str. 68, "Observe that... "*: Np. przy $t > 0$ nie jest jasne, co ma Autor na myśli, pisząc że zachowanie gęstości „w $x = 0$" wyklucza możliwość spełniania założeń Tw. 12.

215. **I; ew.**; *str. 70, 2 ostatnie wiersze tabeli 2*: Nieco dziwi fakt, że podane w obu wierszach błędy są identyczne dla rozważanych n. Czy to może zwykła pomyłka? Jeśli nie, jakiś wyjaśniający to zjawisko komentarz byłby pożądany.

216. **Red;** *str. 70 i 71, Example 14*: To interesujący przykład i jednocześnie ładna jest w swej prostocie ogólna metoda (opisana w nim de facto), pokazująca zastosowanie wcześniejszych wyników tej pracy. Sądzę, że przykład ten nie bardzo pasuje do podrozdziału, w którym został zamieszczony — nie ma wiele wspólnego z komputerowymi wyliczeniami. Chyba warto przenieść go nieco wcześniej (ew. do osobnego podrozdziału?), a wspomnianą ogólną metodę (wyznaczania gęstości miary spektralnej dla macierzy Jacobiego „zbliżonej" do macierzy ze znaną gęstością) tam też opisać — w postaci odrębnego wyniku (twierdzenia/wniosku).

M Moszyński

....

Marcin Moszyński,
Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski