



UNIwersytet IM. A. MICKIEWICZA
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
ul. Umultowska 87
61-614 Poznań
<http://www.wmi.amu.edu.pl/>

ZAKŁAD MATEMATYKI DYSKRETNEJ
prof. dr. hab. Jerzy Jaworski
Telefon: (61) 829 5396
Faks: (61) 829 5315
jaworski@amu.edu.pl

Poznań, 18 maja 2016 roku

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANI MGR AGNIESZKI CZYŻEWSKIEJ-JANKOWSKIEJ
PT. „NON-ORIENTABILITY OF MAPS AND COMBINATORICS OF JACK POLYNOMIALS”
(„NIEORIENTOWALNOŚĆ MAP I KOMBINATORYKA WIELOMIANÓW JACKA”)

Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Wielomiany Jacka są rodziną wielomianów symetrycznych indeksowaną przez partycję π i zależną od dodatkowego parametru α . Z jednej strony są one szczególnym przypadkiem wielomianów Macdonalda, z drugiej - uogólnieniem klasycznych wielomianów Schura dla $\alpha = 1$. Główne wyniki recenzowanej rozprawy dotyczą pewnych hipotez związanych z odpowiednio znormalizowanymi współczynnikami - tzw. charakterami Jacka $Ch_{\pi}^{(\alpha)}(\lambda)$ - w rozwinięciu takich wielomianów w bazie potęgowych funkcji symetrycznych. Są one uogólnieniem znormalizowanych charakterów grup permutacji i można je traktować jak ich (charakterów grup permutacji) naturalną, zadaną parametrem α , deformację. Charaktery grup permutacji można badać jako funkcje klasy sprzężoności (określonej partycją π) przy ustalonej nieredukowalnej reprezentacji (diagramie Younga) lub, w podejściu dualnym, jako funkcje diagramu Younga λ przy ustalonej partycji π . Takie podejście okazało się również celowe dla charakterów Jacka. Jedną z ważnych ich własności jest możliwość rozwinięcia w bazie "wolnych kumulant", bardzo użytecznych funkcji na zbiorze diagramów Younga, co prowadzi do postaci tzw. wielomianów Kerova. Zgodnie z szeregiem hipotez dotyczących współczynników związanych z charakterami Jacka, są one nieujemnymi liczbami całkowitymi. Naturalne są więc pytania o ich kombinatoryczną

interpretację. Rozprawa doktorska przedstawia wyniki badań związków między kombinatoryką charakterów Jacka a niezorientowanymi mapami (grafami dwudzielnymi ułożonymi na niezorientowanych powierzchniach). Kluczowe w tym kontekście jest wykorzystanie pewnej rodziny funkcji na zbiorze diagramów Younga - liczby pewnych zanurzeń mapy w diagram Younga, oraz zaproponowanej przez Dołęgę, Féraya i Śniadego (2014) wielkości - miary nieorientowalności mapy mon_M - prowadzącej do zdefiniowania następującego szeregu

$$\widehat{\text{Ch}}_\pi^{(\alpha)}(\lambda) := (-1)^{\ell(\pi)} \sum_M \text{mon}_M \mathfrak{N}_M(\lambda),$$

gdzie suma jest po wszystkich niezorientowanych mapach M z typem ściany π a $\mathfrak{N}_M(\lambda)$ jest odpowiednio znormalizowaną liczbą zanurzeń. Głównym celem rozprawy było udowodnienie (patrz hipoteza 1.7.1), że jeżeli ograniczymy się do map z jedną ścianą (n) i o małym genusie g , $g \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, to takie "obcięcie" charakteru Jacka $\text{Ch}_n^{(\alpha),g}(\lambda)$ jest równe

$$\text{Ch}_n^{(\alpha),g}(\lambda) = \widehat{\text{Ch}}_n^{(\alpha),g}(\lambda) = - \sum_M \text{mon}_M \mathfrak{N}_M(\lambda),$$

gdzie tym razem suma jest ograniczona do wszystkich niezorientowanych map M małego genusu g z typem ściany (n).

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 85 stron, składa się z trzech rozdziałów wprowadzających, czterech przedstawiających wyniki rozprawy oraz spisu literatury, który obejmuje 35 pozycji. W pierwszym, wstępnym, rozdziale Autorka przedstawia bardzo zwięźle i często nieformalnie – odsyłając do formalnych definicji i wyjaśnień w późniejszych rozdziałach – kluczowe pojęcia: wielomiany Jacka, charakter Jacka, zanurzenia grafów dwudzielnych w diagramy Younga, parametr deformacji i normalizacja liczby zanurzeń, wielomiany Kerova i hipotezy Lassalla z nimi związane. W ostatniej części tego rozdziału przedstawione zostały także główne wyniki rozprawy związane z hipotezą 1.7.1. Drugi rozdział wprowadza używaną w pracy notację dla partycji, diagramów Younga, permutacji, charakterów Jacka, α -wielomianów, wolnych kumulant. Ponieważ używana w rozprawie normalizacja pochodząca z prac Dołęgi, Féraya i Śniadego jest inna od zaproponowanej przez Lassalla, w ostatnim podrozdziale podane zostały związki między różnymi wielkościami w obu tych "notacjach". Trzeci rozdział wprowadza już bardziej formalnie kluczowe w kontekście całej rozprawy pojęcia niezorientowanej mapy, "typu ściany" mapy, charakterystyki Eulera mapy (charakterystyka powierzchni, na której mapa została ułożona). Dla trzech rodzajów krawędzi (krawędzi "wstażkowych") mapy zdefiniowane zostają ich "wagi". Wprowadzona zostaje również operacja usuwania krawędzi, potrzebna do

definicji "historii" porządku kolejnego usuwania krawędzi z mapy i odpowiadającej tej historii wagi mapy. To prowadzi do średniej wagi po wszystkich $n!$ historiach (porządkach) będącej wspomnianą wyżej miarą nieorientowalności mapy o n krawędziach (mon_M). Rozdział czwarty jest pierwszym rozdziałem rozprawy zawierającym oryginalne wyniki Autorki. Dwa pierwsze i główne twierdzenia (4.0.2 i 4.0.4) stwierdzają, że dla genusów $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, $\widehat{\text{Ch}}_n^{(\alpha),g}(\lambda)$ jest α -wielomianową funkcją, dla której w określającej jej sumie po mapach ograniczyć się możemy do map zredukowanych. Głównym narzędziem w dowodach tych dwóch twierdzeń jest znalezienie wzoru na tzw. dominującą część $\widehat{\text{Ch}}_n^{\text{top}}(\lambda)$ co zostało osiągnięte w twierdzeniach 4.2.2 i 4.2.3. Te dwa ostatnie wyniki bazują na bardzo interesującej udowodnionej przez Autorkę bijekcji (patrz twierdzenie 4.2.13). Wynikający z niej wniosek 4.2.14 oraz własność 4.2.16 prowadzą natychmiast do twierdzenia 4.2.2. W podobny sposób przeprowadzić można dowód drugiego wspomnianego twierdzenia. Wyniki tego rozdziału, których uzyskanie niewątpliwie wymagało od Autorki pomysłowości, świadczą o jej dojrzałości naukowej i zasługują w mojej ocenie na większą uwagę - nie wiem, czy nie zaliczyłbym ich do najważniejszych wyników rozprawy. Piąty rozdział, oprócz standardowego uogólnienia wyniku z pracy Dołęgi, Féraya i Śniadego, podaje główny wynik pracy - twierdzenie 5.4.1, które łącznie z wynikiem Dołęgi i Féraya daje prawdziwość głównej hipotezy rozprawy (1.7.1) dla map o genusach $0, \frac{1}{2}, 1$. Jakkolwiek Autorka nie pokazała prawdziwości tej hipotezy dla genusu $\frac{3}{2}$, to uzyskane wzory, zgodne z przewidywaniami i wynikami Lassalla, mogą świadczyć o jej poprawności. Dowód głównego twierdzenia, zawarty w rozdziale szóstym, zawiera kilka wyników świadczących o biegłości Autorki w używaniu odpowiednich narzędzi. Szkoda, że wyniki dotyczące współczynników wielomianów Kerova szeregów $\widehat{\text{Ch}}_n^{(\alpha)}$ dla genusów $\frac{1}{2}, 1$ przedstawione zostały w rozprawie zbyt skrótowo - bez dodatkowych wyjaśnień okazały się trudne do sprawdzenia. W jeszcze większym stopniu powyższa uwaga dotyczy ostatniego rozdziału podającego współczynniki wielomianów Kerova w przypadku map o genusie $\frac{3}{2}$. Są one niewątpliwie prawdziwe - zostały potwierdzone ostatnio uzyskanymi przez promotora Autorki ogólniejszymi wynikami.

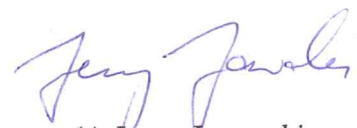
Reasumując, rozprawa doktorska mgr Agnieszki Czyżewskiej-Jankowskiej zawiera ciekawe pomysły, oryginalne i interesujące wyniki, których uzyskanie wymagało zaawansowanego warsztatu naukowego, dużej intuicji i "technicznej" biegłości. Pewien niepokój budzi fakt, że dotychczasowy dorobek publikacyjny Autorki nie wiąże się z omawianą rozprawą i nie ma w niej żadnej wzmianki o przygotowywanych publikacjach z wyników rozprawy.

Pewne zastrzeżenia budzić może rozprawa od strony edytorskiej. Recenzowanej pracy doktor-

skiej nie czyta się łatwo - wstępne rozdziały pomocne mogą być dla dobrze obeznanych z tematyką specjalistów lub zrozumiałe się stają przy drugim, trzecim czytaniu. Dodatkowo rażą: powtórzenia sformułowań twierdzeń, niekonsekwentne nazewnictwo dla tych samych pojęć w różnych rozdziałach pracy (patrz: dwudzielność), błędy edytorskie np. nie zawsze najlepiej wyedytowane wzory. Czytelnikowi może również przeszkadzać używanie pojęć przed ich formalnym wprowadzeniem, jak i wszelkie odnośniki do "przyszłości" oraz nieprecyzyjne sformułowania (poprawne sformułowania wynikają z reguły z kontekstu). Praca napisana jest w języku angielskim - nie czuję się kompetentny w wystarczającym stopniu, by móc formułować jakiegokolwiek oceny językowe, chociaż miałem kilka wątpliwości w trakcie jej czytania. Troszkę dziwi mnie fakt, że Autorka nie ustrzegła się błędów w bardzo krótkim przecież, jedynym tekście wymaganym w języku polskim - w "Streszczeniu". Chciałbym jednak wyraźnie zaznaczyć, że wspomniane wyżej zastrzeżenia nie mają wpływu na moją zdecydowaną pozytywną ocenę wyników rozprawy.

Konkluzja

Uważam, że złożona rozprawa mgr Agnieszki Czyżewskiej-Jankowskiej spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim i może stanowić podstawę nadania stopnia doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki.


(-) Jerzy Jaworski