

Kombinatoryka asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji

STRESZCZENIE

W niniejszej pracy badam strukturę wielomianów Kerova, będących jednym z najważniejszych narzędzi w asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji. Opis tej struktury polega między innymi na ukazaniu związku z mapami dwudzielnymi i badaniu kombinatoryki tych map. W pracy badana jest również struktura uogólnionych wielomianów Kerova pochodzących od charakterów Jacka. W szczególności przedstawione zostaną dowody hipotez Lassalle'a opisujących tę strukturę, jak również zastosowanie otrzymanych wyników do opisu typowych zachowań losowych diagramów Younga względem miary Jacka. Struktura rozprawy przedstawia się następująco.

Rozdział 1 jest krótkim wstępem do niniejszej pracy. Opisuje on w sposób ogólny dziedzinę badań niniejszej pracy.

Rozdział 2 jest wprowadzeniem szczegółowym do tematyki rozprawy. Opisuje on w szczególności historię omawianych przez nas zagadnień, oraz wprowadza wszelkie niezbędne definicje.

W Rozdziale 3 badamy asymptotykę charakterów grup permutacji na ustalonej klasie sprzężoności. Kerov dowiódł, że takie charaktery wyrazić można jako wielomian w wolnych kumulantach diagramu Younga (są to pewne funkcjonały opisujące kształt diagramu Younga). Pokażemy, że dla dowolnego genuś istnieje pewna uniwersalna funkcja symetryczna wyrażająca współczynniki jednorodnej części wielomianu Kerova stopnia zdeterminowanego przez genuś. Istnienie takiej funkcji zostało postawione jako hipoteza przez Lassalle'a [Las08a]. Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w pracy [DŚ12].

W Rozdziale 4 rozważamy pewną deformację wielomianów Kerova związaną z wielomianami Jacka. Deformacja ta została wprowadzona ostatnio przez Lassalle'a [Las08b, Las09], który sformułował wiele opisujących ją hipotez. Sugerują one istnienie pewnej ukrytej struktury kombinatorycznej pozwalającej w pełni tę deformację zrozumieć. Jednym z wyników tego rozdziału jest dowód pewnej części tych hipotez, mianowicie dowodzimy, że pewne wartości opisujące wprowadzone przez Lassalle'a wielomiany Kerova są wielomianami zmiennej Jacka

α o ustalonym stopniu. Jako prosty wniosek dowodzimy kilku hipotez postawionych przez Lassalle'a. Wynik ten ma kilka interesujących konsekwencji idących w różnych kierunkach. Po pierwsze, podamy nowy dowód tego, że współczynniki w rozwinięciu wielomianów Jacka w bazie jednomianowej lub potęgowej zależą wielomianowo od α . Po drugie, pewna część Hipotezy o sparowaniach Jacka postawionej przez Gouldena i Jacksona zostanie udowodniona. W końcu, jako główny wniosek udowodnimy Prawo Wielkich Liczb oraz Centralne Twierdzenie Graniczne dla miary Jacka, będącej jednoparametrową deformacją miary Plancherela. Ten wynik uogólnia słynne twierdzenie Vershika-Kerova o kształcie granicznym oraz Centralne Twierdzenie Graniczne Kerova i udowodniony jest przy pomocy wielowymiarowej wersji metody Steina. Fragmenty tego rozdziału pojawiają się w preprincie [DF12].

W ostatnim Rozdziale 5 badamy kombinatoryczną strukturę charakterów Jacka. Formułujemy hipotezę dotyczącą istnienia pewnych wag na zbiorze map (tzn. na zbiorze grafów narysowanych na powierzchniach), pozwalających wyrazić charaktery Jacka jako sumy z wagami pewnych funkcji określonych na zbiorze map, mających bardzo prostą strukturę. Podajemy przykład takich wag, który daje pozytywną odpowiedź na naszą hipotezę w kilku, acz nie wszystkich przypadkach. Waga przez nas opisana mierzy nieorientowalność danej mapy. Dowodzimy również, że nasza hipoteza implikuje pewne hipotezy dotyczące struktury charakterów Jacka, postawione przez Lassalle'a. Wyniki znajdujące się w tym rozdziale można znaleźć w preprincie [DFŚ13].

Bibliografia

- [DF12] Maciej Dołęga and Valentin Féray. On Kerov polynomials for Jack characters. Preprint arXiv:1201.1806, 2012.
- [DFŚ13] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Jack polynomials and the measure of non-orientability of maps. Part 1. Orientability generating series. Preprint arXiv:1301.6531, 2013.
- [DŚ12] Maciej Dołęga and Piotr Śniady. Asymptotics of characters of symmetric groups: Structure of Kerov character polynomials. *J. Comb. Theory Ser. A*, 119(6):1174–1193, 2012.
- [Las08a] Michel Lassalle. An explicit formula for the characters of the symmetric group. *Math. Ann.*, 340(2):383–405, 2008.
- [Las08b] Michel Lassalle. A positivity conjecture for Jack polynomials. *Math. Res. Lett.*, 15(4):661–681, 2008.
- [Las09] Michel Lassalle. Jack polynomials and free cumulants. *Adv. Math.*, 222(6):2227–2269, 2009.