

Dr hab. Robert Wolak, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
Kraków

Kraków, 27 września 2014

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agaty Magdaleny Chorowskiej

Silne symplektyczne foldy i ich zastosowania w topologii kontaktowej

Topologia symplektyczna w parzystych wymiarach i jej odpowiednik nieparzystowymiarowy topologia kontaktowa od kilkudziesięciu lat są obiektem zainteresowania licznych topologów.

Struktura różności symplektycznych jest dużo lepiej poznana niż różności kontaktowych, pomimo że istnieje naturalny sposób przechodzenia od jednego typu różności do drugiego. W dalszym ciągu jest wiele otwartych i ważnych problemów dotyczących różności kontaktowych, wiele pytań na temat struktury tychże przestrzeni pozostaje bez odpowiedzi. Ciągłe nie znamy dobrze struktury różności kontaktowych zarówno zwartych jak i otwartych.

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy pewnych problemów topologii różności kontaktowych, odpowiada na kilka konkretnych pytań dotyczących pewnych klas różności kontaktowych poszerzając naszą wiedzę. Mgr Chorowska wykazuje znajomość najważniejszych i aktualnych wyników i technik topologii różniczkowej, co pozwala na otrzymanie nietrywialnych wyników w tejże ważnej i trudnej tematyce.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów, a właściwie z pięciu, jeśli pominąć krótki wstęp. Drugi rozdział jest poświęcony wprowadzeniu najważniejszych pojęć z topologii symplektycznej i kontaktowej, oraz przypomnieniu ważnych konstrukcji i twierdzeń, a w szczególności symplektyczny kobordyzm, kontaktowe chirurgie oraz rozkład otwartej książki (open book decomposition). Ta część pracy nie zawiera żadnych nowych rezultatów, zresztą podobnie jak rozdział trzeci, w którym autorka w sposób sumaryczny przypomina różne relacje w zbiorze form kontaktowych oraz zależności pomiędzy nimi.

Rozdział czwarty wprowadza klasę różności symplektycznych, które odgrywają ważną rolę w rozprawie: mocne symplektyczne foldy (strong symplectic folds (SSF)). Symplektyczne foldy były badane przez wielu ważnych topologów, jedną z ciekawszych prac jest artykuł A. Cannas da Silva, *Fold-forms for four-folds*, J. Symp. Geom. 8 (2010). Ta zmodyfikowana definicja pojawia się w pracach B. Hajduka et al. Pierwsze trzy podrozdziały mają charakter wprowadzenia, zawierają definicje, przykłady oraz wyniki dotyczące wymiaru 4. Czwarty podrozdział zajmuje się chirurgiami na mocnych symplektycznych foldach. By dobrze opisać te operacje autorka omawia najpierw kobordyzmy różności z brzegiem i rozkład tych kobordyzmów na dołączanie rączek i półrączek tak by móc stosować te operacje do różności symplektycznych z brzegiem kontaktowym. Szczegółowy opis pozwala na udowodnienie, że chirurgie o indeksie nie większym niż połowa wymiaru różności nie wyprowadzają poza klasę mocnych symplektycznych foldów (Theorem 4.4.6). W kolejnym podrozdziale autorka udowadnia, że wypukła podróżność kowymiaru 1 różności symplektycznej dopuszcza strukturę mocnego symplektycznego foldu (Proposition 4.5.1):

A closed convex hypersurface in a cooriented contact manifold admits an SSF structure.

Stwierdzenie to jest właściwie zawarte w dowodzie Lematu 2.2 z V. Colin, P. Ghuggini, K. Honda, M. Hutchings, *Sutures and contact homology I*, Geometry & Topology 15 (2011), ale dowód ten

zawiera pewne nieścisłości, a także nie ma tam wzmianki o mocnych symplektycznych foldach. Przedstawiony dowód jest adaptacją metod w/w dowodu lematu.

Stwierdzenie to jest w szczególności jest to prawdziwe dla pewnych tubularnych wiązek sferycznych wokół podrozmaitości Legendre'a (Proposition 4.5.2). Przedostatni podrozdział przedstawia konstrukcję kontrolowalnej formy kontaktowej produkcie rozmaitości prawie zespolonej i prostej rzeczywistej. W ostatnim podrozdziale jest przytoczona konstrukcja rozmaitości kontaktowych przy pomocy mocnych symplektycznych foldów według Geiges'a i Stepsicza, to znaczy: (Proposition 4.7.1)

Jeśli M jest mocnym symplektycznym foldem, to na rozmaitości $M \times S$ istnieje forma kontaktowa.

Wyżej wymienione twierdzenia i własności pozwalają na wyróżnienie trzech rodzin rozmaitości dla których ich iloczyn kartezjański z S dopuszcza strukturę kontaktową (Theorem 4.7.3).

W piątym rozdziale mgr Chorowska wprowadza pojęcie mocnego symplektycznego foldowego kobordyzmu pomiędzy rozmaitościami kontaktowymi. W pierwszym podrozdziale są omówione mocne symplektyczne foldy z brzegiem oraz chirurgie mocnych symplektycznych foldów. Drugi podrozdział jest poświęcony strukturom uogólnionych mocnych symplektycznych foldów. Struktura ta to rozkład rozmaitości na skończoną liczbę symplektycznych kobordyzmów sklejonych wzdłuż brzegów. Autorka udowadnia, że każda domknięta zorientowana rozmaitość wymiaru 4 dopuszcza uogólnioną strukturę mocnego symplektycznego foldu (Theorem 5.2.3) oraz wersję tego twierdzenia dla rozmaitości z brzegiem (Theorem 5.2.4). Twierdzenie to jest słabszą wersją twierdzenia R.I. Baykura z *Kähler decompositions of 4-manifolds*, *Algebr. Geom. Topol* 6 (2006), gdzie zostało udowodnione istnienie struktury mocnego symplektycznego foldu na dowolnej domkniętej rozmaitości wymiaru 4, ale dowód tej słabszej wersji jest znacznie prostszy. W dowodzie autorka wykorzystuje pojęcie stabilizatora rozkładu otwartej księgi, stabilizatora pozytywnego i negatywnego.

Ostatni rozdział rozprawy jest poświęcony własnościom struktur kontaktowych na iloczynie kartezjańskim $M \times S$ przy założeniu, że rozmaitość M jest mocnym symplektycznym foldem. Tak otrzymana forma kontaktowa jest nazywana MSF formą kontaktową. W pierwszym podrozdziale jest podany explicite wzór tejże formy kontaktowej przy pomocy dokładnych symplektycznych form symplektycznych wypełnień struktury mocnego symplektycznego foldu. Drugi podrozdział przedstawia homotopijną klasyfikację w wymiarze 3 subwiązek kowymiaru 1 odpowiadających MSF strukturom kontaktowym. Warto przytoczyć dwa wyniki na ten temat:

Stwierdzenie 6.2.3 *Dla danej domkniętej powierzchni Σ dowolna liczba całkowita może być stopniem funkcji odpowiadającej MSF strukturze kontaktowej na $\Sigma \times S$.*

Wniosek 6.2.4 *Dla danej domkniętej powierzchni Σ w każdej klasie homotopii S -niezmienniczych koorientowanych 2-wymiarowych dystrybucji na $\Sigma \times S$ istnieje MSF struktura kontaktowa.*

Ostatni podrozdział zajmuje się własnością wypełniania (fillability) MSF struktur kontaktowych na $S \times S$, i bardziej ogólnie na iloczynie kartezjańskim podwojenia dokładnej rozmaitości symplektycznej i S : Stwierdzenie 6.3.5 zapewniające istnienie dokładnego wypełnienia symplektycznego w tym przypadku. W ostatniej części tego podrozdziału autorka udowadnia, że dla dowolnej zorientowanej powierzchni Σ na 3-rozmaitości $\Sigma \times S$ istnieją MSF struktury kontaktowe posiadające własność wypełniania jak i jej nieposiadające (Proposition 6.3.8). W tym celu jest użyte pojęcie płaszczyznowej torsji (planar torsion), które jest przeszkodą dla własności wypełniania, patrz C. Wendl (2010).

Wydaje się, że najciekawszymi wynikami pracy są

1) **Stwierdzenie 4.5.1** o istnieniu mocnych struktur symplektycznego foldu na domkniętych wypukłych podrozmaitościach kowymiaru 1 koorientowanych rozmaitości kontaktowych pomimo że, dowód jest adaptacją i korektą dowodu z pracy V. Colin et al.

2) Ciekawe i ważne technicznie **Twierdzenie 4.4.6** o k-chirurgiach mocnych symplektycznych foldów.

3) **Twierdzenie 5.2.3** o istnieniu uogólnionych struktur mocnych symplektycznych foldów na domkniętych 4-rozmaitościach Jest to słabsza wersja twierdzenia Baykura, lecz dzięki temu można było przedstawić czytelniejszy i prostszy dowód tego faktu.

Pozostałe oryginalne wyniki rozprawy nie wydają się być tak ważne, dotyczą wielu interesujących problemów, raczej stawiają więcej pytań niż przedstawiają rozwiązania.

Mgr Agata Chorowska bardzo dobrze opanowała trudne narzędzia topologii symplektycznej i kontaktowej. Posługuje się nimi sprawnie i wykazuje bardzo dobrą znajomość aktualnej literatury dotyczącej zagadnień rozprawy.

Praca jest napisana przejrzysto i konkretnie. Wszystkie konieczne pojęcia i własności są zawarte we wstępnych rozdziałach pracy. Rozumowania są przeprowadzane bez niepotrzebnych dłużyzn, ale jednocześnie zawierają konieczne elementy.

Pomimo tego autorka nie ustrzegła się pewnych redakcyjnych błędów jak np. pewien bałagan w oznaczeniach w sekcji *Controllable contact forms* ... na stronach 41 i 42, uważam, że przedstawiona **rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymagania ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr Agaty Chorowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

