prof. dr hab. Paweł M. Idziak
Katedra Algorytmiki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Prof. Stanisława Łojasiewicza 6
30–348 Kraków

tel.: (+48–12) 664 66 48
sekr.: (+48–12) 664 66 47
fax: (+48–12) 664 66 72
e–mail: idziak@tcs.uj.edu.pl
http://tcs.uj.edu.pl

Kraków, 2 stycznia 2015

Recenzja rozprawy doktorskiej Jana Dobrowolskiego

pt. *Groups and rings in some model-theoretic and model-theory-motivated contexts*

Recenzowana praca doktorska zawiera oryginalne wyniki Jana Dobrowolskiego, z których większość jest już opublikowana, bądź przygotowana do publikacji w pracach:

(D1) J.Dobrowolski and K.Krupiński, On ω-categorical, generically stable groups and rings, *Annals of Pure and Applied Logic*, **164**(2013), 802–812,

(D2) J.Dobrowolski and K.Krupiński, Locally finite profinite rings, *Journal of Algebra*, **401**(2014), 161–178,

(D3) J.Dobrowolski, New examples of small Polish structures, *Journal of Symbolic Logic*, **78**(2013), 969–976,

(D4) J.Dobrowolski, Topologies induced by group actions, (in preparation).

Z dołączonego przez K.Krupińskiego oświadczenia wynika, że jego wkład nie wykraczał poza standardową współpracę (szacowaną przy wspólnych pracach (D1–D2) na 50-50) i opiekę zwykle udzielaną doktorantom przez swoich opiekunów naukowych.

Wyniki rozprawy dotyczą problemów leżących na pograniczu algebry i teorii modeli. W istocie badania te motywowane są chęcią zrozumienia struktury grup i pierścieni, na które nałożono bądź pewne ograniczenia czysto teorio-modelowe, bądź dodatkową strukturę topologiczną (proskończoną lub bardziej ogólnie polską), w pewnym stopniu motywowaną topologicznymi metodami teorii modeli.

I tak, rozprawę otwierają dwa bardzo ładne wyniki o ω-kategorycznych grupach i pierścieniach generycznie stabilnych. Pokazuje się, że muszą one być wirtualnie nilpotentne (*nilpotent-by-finite*), tzn. muszą posiadać nilpotentną kongruencję skończonego indeksu. To bardzo ładne powiązanie dwu (pozornie niezależnych) założeń o pewnej jednorodności modelu. Z jednej strony stabilność (i jej uogólnienia) teorii to (intuicyjnie) niemożność interpretacji nieskończonego łańcucha, a zatem brak pewnego rodzaju sztywności modelu. Z drugiej strony czysto algebraiczna własność nilpotentności dopuszczająca wiele (choćby lokalnych) automorfizmów[1]. Wirtualna nilpotentność, w miejsce konkluzji o nilpotentności, dopuszcza jedynie "skończone" zaburzenia nilpotentności, a – jak się okazuje – to właśnie zaburzenia nilpotentności (tzn. braku odpowiednio dużej dozy centralizowania/annihilacji) odpowiedzialne są za możliwość (parametrycznego) wydefiniowania pewnych (nieskończonych) "sztywnych" tworów porządkowych. Tak też przebiega argumentacja w Rozdziale 1.

Wyniki tego typu były już znane od końca lat 1970-tych, kiedy to J.Baldwin i B.Rose oraz W.Baur, G.Cherlin i A.Macintyre (a także niezależnie U.Felgner) pokazali że ω-kategoryczne i stabilne (odpowiednio) pierścienie i grupy są wirtualnie nilpotentne. W istocie obydwa główne wyniki rozdziału 1 znacząco uogólniają te właśnie twierdzenia dla grup/pierścieni stabilnych. Aby jednak takie uogólnienia osiągnąć (przy istotnie osłabionych założeniach) konieczne było wypracowanie nowych metod, jako że te używane wcześniej istotnie korzystały z dziedziczności stosownych założeń teoriomodelowych (jak np. stabilność) na interpretowalność. W przypadku generycznej stabilności, która nie tylko nie jest definiowana przez interpretowalność, ale nie jest na nią dziedziczna, te dodatkowe nowe, i bardzo pomysłowe, techniki użyte w dowodzie wydają się nie do obejścia.

W tym miejscu warto wskazać szerszy od wspomnianego kontekst badań struktury ω-kategorycznych grup i pierścieni z pewnymi założeniami o stabilności. Znane są bowiem relaksacje założeń o stabilności we wspomnianych wynikach o wirtualnej nilpotentności takich struktur stabilnych. Tzn. wiadomo, że czasem założenie o stabilności można zastąpić jednym z dwu jego składników: NIP (co intuicyjnie oznacza niemożność wydefiniowania dowolnie dużych porządków boole'owskich) lub NSOP (co intuicyjnie oznacza niemożność interpretacji częściowego porządku z nieskończonym łańcuchem). Istotnie NSOP wystarcza dla grup (H.D.Macpherson) i pierścieni (K.Krupiński), a NIP dla pierścieni (K.Krupiński). Jednakże osłabienie założenia o stabilności, stabilnością generyczną idzie w innym (w mojej opinii trudniejszym) kierunku.

Warto również dodać, że tak dla ω-kategorycznych grup jak i pierścieni superstabilność implikuje wirtualną abelowość. Przypuszcza się, że dla wirtualnej abelowości wystarcza stabilność (w miejsce superstabilności), jako że nie wszystkie moduły są superstabilne. Chciałbym tu jednak wyrazić przekonanie o wielce nieprawdopodobnej możliwości osłabienia tego założenia do generycznej stabilności – moduły bowiem są nie tylko generycznie stabilne ale i stabilne.

Podsumowując Rozdział 1, uważam że zawiera on wspaniałe i głębokie wyniki. Gdyby zostały otrzymane przez doktoranta (w miarę) samodzielnie, już one same zasługiwałyby na wyróżnienie doktoratu.

---

[1] Jeszcze większość homogeniczność zapewnia abelowość struktury (w sensie teorii komutatora R.Freese'a i R.McKenziego, tzn. przemienność w przypadku grup i zerowość mnożenia w przypadku pierścieni), jako że w istocie mamy tu do czynienia z modułami, czyli z (typowymi) modelami stabilnymi.

Trochę inny charakter (z przewagą akcentów topologicznych nad algebraicznymi) mają Rozdziały 2–4. Rozdział 2 zawiera wyniki będące próbą zrozumienia struktury pierścieni proskończonych. (Struktury proskończone zostały wprowadzone przez L.Newelskiego przy próbach ataku na hipotezę Vaught'a dla teorii superstabilnych. Takie proskończone modele mogą być niezwykle użyteczne przy opisie niektórych własności strukturalnych przeliczalnych modeli teorii superstabilnych. Pozwalają one bowiem na precyzyjniejsze ujęcie odpowiednika pojęcia forkingowej zależności w kontekście modeli przeliczalnych.)

Zwykle dla opisu struktury pierścienia R niezbędne jest zrozumienie trzech składników:

- struktury pierścienia półprostego $R/J(R)$, tzn. pierścienia R modulo jego radykał Jacobson'a,
- struktury radykału $J(R)$ jako pierścienia,
- działania pierścienia $R/J(R)$ na radykale $J(R)$.

W rozważanym kontekście osiągnięto dwa pierwsze cele dla pierścieni proskończonych z dodatkowym słabym założeniem lokalnej skończoności (tzn. że jedynie 1-generowane podpierścienie są skończone). W szczególności otrzymano bardzo ładną (i pełną) charakteryzację półprostych słabo lokalnie skończonych pierścieni jako dokładnie tych, które są izomorficzne (jako pierścienie topologiczne) z prostymi produktami pierścieni (wszystkich) macierzy (być może różnorakich rozmiarów) nad ciałem skończonym, w których jedynie skończenie wiele pierścieni pojawia się na osiach tego produktu.

To piękne twierdzenie uzupełnione jest warunkiem koniecznym jaki musi spełniać radykał Jacobson'a słabo lokalnie skończonego pierścienia proskończonego. Pokazano mianowicie, że musi on spełniać tożsamość $r^n = 0$, przy pewnym wspólnym n dla wszystkich $r \in J(R)$. Uogólnia to, i tak już dość mocne wcześniejsze wyniki K.Krupińskiego i F.Wagner'a dla małych pierścieni proskończonych. Rozdział 2 zawiera też pogłębioną dyskusję o innych hipotezach i problemach K.Krupińskiego i F.Wagner'a.

Również i ten rozdział, tak poprzez użyte w nim metody, jak i uzyskane wyniki robi bardzo dobre wrażenie.

Z kolei Rozdział 3 opuszcza świat struktur proskończonych na korzyść większego świata struktur polskich. Obydwa te światy motywowane są chęcią uogólnienia metod teorio-modelowych i wyzwolenia się od języka 1-go rzędu. Pierwszy z nich, struktur proskończonych, został wprowadzony z dużym sukcesem przez L.Newelskiego; drugi, świat struktur polskich, powstał również we Wrocławiu i zawdzięcza swój start i rozwój K.Krupińskiemu. By jednak ten drugi dobrze inkorporował pojęcia forkingu i (nie)zależności jest zwykle ograniczany do struktur małych (w których K.Krupiński z powodzeniem zdefiniował i rozwinął tzw. nm-niezależność). Tu już jednak trudniej o naturalne przykłady nie proskończone, choć takie są znane. Przed Dobrowolskim były one jednak dalej (topologicznie) zero-wymiarowe. Rozdział 3 podaje bardzo ciekawą (i w sumie matematycznie relatywnie prostą, acz pomysłową) konstrukcję małej polskiej G-grupy o niezerowym wymiarze (w istocie jako przestrzeń topologiczna jest to 1-wymiarowa zupełna przestrzeń Erdös'a). Druga z konstrukcji Rozdziału 3 prowadzi do małych polskich struktur grupowych bez nm-generycznych orbit, tym samym negatywnie odpowiadając na jedno z pytań K.Krupińskiego.

Te skonstruowane w pełni samodzielnie przez Jana Dobrowolskiego przykłady pokazują jego biegłość i duże obycie matematyczne.

Rozdział 4 ma z mojego punktu widzenia dość odmienny od innych charakter. Robi wrażenie próby zrozumienia (w bardzo już szerokim kontekście, wykraczającym poza struktury proskończone, a nawet (małe) struktury polskie) interakcji topologii grupy G działającej na zbiór/grupę/pierścień X z możliwą topologią na tym zbiorze/grupie/pierścieniu, tak by działanie G było ciągłe, a poszukiwana topologia na X zgodna z ewentualną strukturą algebraiczną na X.

Odnoszę wrażenie, że badania te, mimo uzyskania kilku (drobnych w porównaniu do reszty rozprawy) wyników, są jeszcze w stanie bardzo początkowym.

Rozprawa zredagowana jest bardzo starannie. Prezentacja wyników jest przemyślana, dobrze zorganizowana i dokonana wyjątkowo przejrzyście. Również pod względem językowym (praca napisana jest w języku angielskim) jak i typograficznym jest prawie wolna od usterek.

Wyniki rozprawy doktorskiej Jana Dobrowolskiego są ważne i stanowią głębokie studium struktury algebraicznej grup i pierścieni z narzucownymi dodatkowymi warunkami (około) teorio-modelowymi, jak np. generyczna stabilność czy proskończoność. Autor wykazał się dużą sprawnością techniczną, olbrzymią erudycją, znajomością literatury i metod badawczych. Pokazał, że potrafi wykorzystywać, adaptować i twórczo rozwijać poznawane metody w rozważanych przez siebie sytuacjach. Problemy atakowane w rozprawie doktorskiej (i badaniach do niej prowadzących) są ambitne i ważne. Poza 4-ma publikacjami (D1–D4) będącymi w istocie kolejnymi rozdziałami rozprawy, mgr Dobrowolski jest autorem (wspólnie ze swoim promotorem) jeszcze jednej, stanowiącej jego pracę magisterską, a dowodzącej (słabszego niż doktorat) wyniku orzekającego, że ω-kategoryczne grupy generycznie stabilne są wirtualnie rozwiązalne. Spośród tych 5-ciu prac, 4 są już opublikowane i to w prestiżowych czasopismach logicznych i algebraicznych (*Annals of Pure and Applied Logic, Journal of Algebra* czy *Journal of Symbolic Logic* (2 prace)). Mgr Dobrowolski pokazał, że jest dojrzałym matematykiem umiejącym sprostać trudnym problemom konkurując przy tym swymi badaniami i wynikami w trudnym środowisku międzynarodowym składającym się z wybitnych uczonych.

Rozważając wniosek o wyróżnienie tej rozprawy miałem jednak na uwadze fakt, że większość tych bardziej znaczących wyników (tzn. zawartych w rozdziałach 1–2) została uzyskana we współpracy z bardzo doświadczonym badaczem.

Nie mam jednak najmniejszych wątpliwości, że cała rozprawa – jako wyjątkowo solidna – **uprawnia do postawienia wniosku o dopuszczenie mgra Jana Dobrowolskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego**. Postuluję również, po wyjaśnieniu jego wkładu w prezentowane w rozprawie wyniki, rozważenie jej wyróżnienia. W przypadku takiego właśnie wyróżnienia, uważam że warto przedstawić tę rozprawę do ogólnopolskich nagród, jak np. nagroda Ministra, PAN czy PTM.