Krzysztof Nowak
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Kraków, 15 kwietnia 2015 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Grzegorza Jagielli "Definiowalna dynamika topologiczna i o-minimalność"

Rozprawa doktorska mgr Grzegorza Jagielli poświęcona jest definiowalnej dynamice topologicznej grup definiowalnych, zwłaszcza nad o-minimalnymi rozszerzeniami ciał rzeczywiście domkniętych. Głównym celem klasycznej dynamiki topologicznej jest poznanie grupy topologicznej G poprzez analizę jej ciągłego działania na przestrzeniach zwartych X. Podstawowymi obiektami, które służą do realizacji tego celu, są G-potoki (G, X), ich półgrupy Ellisa $E(X)$ i grupy Ellisa $\mathcal{H}(G, X)$. Jedyny największy G-potok uniwersalny jest wówczas przestrzenią βG ultrafiltrów na G. Powiązania dynamiki topologicznej z teorią modeli zapoczątkował Ludomir Newelski. Rozwijając teorię Ellisa, rozważał on, w miejsce kompaktyfikacji Stone'a–Ĉecha grupy G, konstrukcję typu "co-heir" Lascara-Poizat'a zwartej przestrzeni globalnych typów skoncentrowanych na G i skończenie spełnialnych w M. Przestrzeń ta jest w naturalny sposób izomorficzna z przestrzenią $S_{ext,G}(M)$ zewnętrznych typów na $G(M)$, czyli przestrzenią ultrafiltrów na algebrze Boole'a zewnętrznie definiowalnych podzbiorów w $G(M)$. Stanowi ona definiowalny odpowiednik maksymalnego G-potoku uniwersalnego βG. Jeśli każdy typ nad M jest definiowalny, wtedy $S_{ext,G}(M)$ pokrywa się z przestrzenią $S_G(M)$ typów z parametrami z M skoncentrowanych na G, czyli przestrzenią Stone'a ultrafiltrów na algebrze Boole'a podzbiorów M-definiowalnych w G. Warunek ten jest automatycznie spełniony dla modeli teorii stabilnych. Twierdzenie Saharona Shelaha stwierdza, że rozszerzenie M^{ext} modelu M teorii zależnej (NIP) o zbiory zewnętrznie definiowalne jest strukturą z (NIP) i z eliminacją kwantyfikatorów, nad którą każdy typ jest definiowalny. Każda teoria słabo o-minimalna jest zależna (NIP). Dlatego $S_{ext,G}(M) = S_G(M^{ext})$ dla dowolnej struktury o-minimalnej M. Definiowalna dynamika topologiczna nad modelami teorii zależnych (NIP) jest obecnie rozwijana przez wielu matematyków, takich jak n.p. A. Pillay, J. Gismatullin, D. Penazzi, A. Chernikov czy też P. Simon.

W wielu przypadkach (n.p. grupy stabilne, o-minimalne grupy definiowalnie zwarte lub definiowalnie ekstremalnie średniowalne oraz definiowalnie średniowalne nad o-minimalnymi rozszerzeniami ciał rzeczywiście domkniętych) grupa Ellisa uniwersalnego potoku M-definiowalnej grupy G, liczona w $\mathrm{Th}\,(M^{ext})$, jest izomorficzna z teorio-modelowym obiektem G/G^{00}, gdzie G^{00} jest najmniejszą podgrupą typowo definiowalną w G ograniczonego indeksu. Jednym z podstawowych problemów dynamiki definiowalnej jest sformułowane przez Newelskiego pytanie, dla jakich grup zachodzi powyższy izomorfizm. Problem ten wydaje się szczególnie naturalny dla teorii zależnych (NIP) — tym bardziej, że (jak wykazali Chernikov–Pillay–Simon) podgrupa G^{00} nie zmienia się przy przejściu do rozszerzenia M^{ext} w przypadku takich teorii.

Recenzowana praca jest napisana po angielsku, liczy 45 stron oraz składa się z czterech rozdziałów, w tym wprowadzenia. Poprzedzona jest streszczeniem w języku polskim i angielskim. W rozdziale drugim (Preliminaries), przypomniane zostały podstawowe pojęcia klasycznej i definiowalnej dynamiki topologicznej oraz teorii struktur o-minimalnych. Następny rozdział zawiera szereg wyników o strukturze dynamicznej grup definiowalnych dopuszczających pewnego rodzaju rozkłady (Propozycja 3.1.4 i Corollary 3.1.6, Propozycja 3.2.1 i 3.2.4). Zachodzą one przy założeniu, że wszystkie typy nad modelem M są definiowalne. Najważniejszymi rezultatami rozprawy są następujące trzy twierdzenia ostatniego, czwartego rozdziału:

1. Propozycja 4.3.4, które opisuje potoki minimalne uniwersalnego potoku definiowalnego grupy $\mathbb{R}$-definiowalnej G mającej rozkład zwarto–beztorsyjny $G = KH$.

2. Twierdzenie 4.3.6, które wskazuje izomorfizm pomiędzy grupą Ellisa uniwersalnego potoku definiowalnego grupy G jak wyżej, a podgrupą

$$N_G(H) \cap K(\mathbb{R}),$$

   zawartą w jej maksymalnej składowej zwartej. Twierdzenie to (zob. Przykład 4.3.15) pozwala na uzyskanie szeregu kontr-przykładów dla wyżej wspomnianego problemu Newelskiego.

3. Twierdzenie 4.4.6, które uogólnia dwa powyższe wyniki na pokrycia uniwersalne, interpretowalne w pewnej strukturze dwu-sortowej.

Rozkłady zwarto–beztorsyjne nie zawsze istnieją. A. Conversano podała szereg warunków koniecznych i wystarczających, np. istnienie maksymalnej, definiowalnie zwartej podgrupy definiowalnej.

Uzyskanie opisanych wyników wymagało od Doktoranta bardzo dobrego opanowania różnorodnych metod teorio-modelowych. Praca jest zredagowana poprawnie. Uważam jednak, że dla pełności i wygody czytelnika, powinna sie tu znaleźć definicja teorio-modelowej składowej spójnej G^{00} grupy G; tym bardziej, że odgrywa ona kluczową rolę w dynamice definiowalnej, chociażby z uwagi na jej związek z grupą Ellisa. Znalazłem także kilka usterek, które wymieniam poniżej. Usterki te nie mają istotnego znaczenia i nie zmieniają mojej pozytywnej oceny dotyczącej strony redakcyjnej.

- str. 8^{11} (Uwaga 2.2.3) powinno być: $\mathcal{U}(U) = 1 \iff U \in \mathcal{U}$
- str. 17 Mam wątpliwości, czy — jak to jest sugerowane — Definicja 3.1.2 grupy ekstremalnie średniowalnej, która uwzględnia zbiór X niekoniecznie zwarty, jest pojęciem zupełnie klasycznym. Uważam, że należałoby podać referencje do tak sformułowanej definicji.
- str. 26_{13} powinno być: $K \not\subset H$
- str. 26 Wyszczególnione są przypadki, w których grupy definiowalne spełniają założenia Propozycji 4.1.4, tzn. są sumą swoich 1-wymiarowych podgrup definiowalnych. Punkt 2 wymienia definiowalnie proste grupy beztorsyjne. Brak jednak takich grup, ponieważ każda grupa definiowalnie prosta nie jest rozwiązalna, a każda grupa beztorsyjna jest rozwiązalna. Wynika to również stad, że (jak wykazała A. Conversano) każda grupa definiowalnie prosta ma maksymalną podgrupę definiowalnie zwartą, która jest nieskonczona, a każda nietrywialna grupa definiowalnie zwarta ma torsje.
- str. 36_8 powinno być: $u_G \in I_G$

Podsumowując, recenzowana przeze mnie rozprawa jest wartościową pracą zawierającą oryginalne wyniki, dotyczące głównie dynamicznej struktury tych grup definiowalnych, które dopuszczają rozkłady zwarto–beztorsyjne. Świadczy ona o bardzo dobrej znajomości tematu i zdolności Autora do prowadzenia samodzielnych i twórczych badań.

Uważam, że rozprawa doktorska pana Grzegorza Jagielli spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania. Wnioskuje o skierowanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Krzysztof Nowak