Wrocław, 8 VII 2015 r.

prof. dr hab. Krzysztof Bogdan
Katedra Matematyki Politechniki Wrocławskiej
krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Wojciecha Cygana "Asymptotyczne własności pewnej klasy spacerów losowych na kracie liczb całkowitych".

Rozprawa doktorska mgr. Wojciecha Cygana, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Alexandra Bendikova ma 78 stron, w tym 6 rozdziałów i bibliografię. Rozprawa dotyczy teorii potencjału pewnej klasy spacerów losowych $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ na kracie $\mathbb{Z}^d$. Spacery te otrzymuje się subordynując klasyczny spacer losowy $(X_k)_{k\geqslant 0}$ na $\mathbb{Z}^d$ przez niezależny spacer losowy $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ o przyrostach dodatnich na $\mathbb{Z}$:

$$Y_n := X_{\tau_n}, \qquad n \geqslant 0.$$

Rozkład zmiennej X_1 jest rzecz jasna jednostajny na zbiorze $2d$ wektorów o długości 1 w $\mathbb{Z}^d$, a rozkład τ_1 zadany jest w następujący sposób,

$$\mathbb{P}(\tau_1 = n) = \frac{1}{n!}\int_{(0,\infty)} t^n e^{-t}\nu(dt), \quad n > 1,$$
$$\mathbb{P}(\tau_1 = 1) = b + \int_{(0,\infty)} te^{-t}\nu(dt), \quad n = 1,$$

gdzie $b \geqslant 0$, ν jest miarą całkującą $\min(t, 1)$. Za pośrednictwem wzoru Lévy'ego-Chińczyna, rozkład Y wiąże się z wykładnikiem Laplace'a

$$\psi(\lambda) = b\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda s})\nu(ds), \qquad \lambda > 0,$$

i nie jest to związek powierzchowny. Na poziomie rachunku funkcjonalnego operatorów splotu z rozkładami Y_1 i X_1 mamy

$$I - \phi_Y = \psi(I - \phi_X).$$

Reprezentatywnym przykładem są $\psi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}$ i $\nu(dt) = \alpha\Gamma(1 - \alpha/2)^{-1}t^{-1-\alpha/2}dt$, gdzie $0 < \alpha < 2$. Mianowicie wyniki rozprawy otrzymuje się przy założeniu regularnej zmienności rzędu $\alpha/2$ dla $\psi(\lambda)$ przy $\lambda = 0$.

Rozdziały 1-2 rozprawy mają charakter wstępny; opisują zawartość i wprowadzają podstawowe pojęcia.

Rozdział 3 opisuje powyższą dyskretną subordynację za pracą [6] cytowaną w bibliografii rozprawy i podaje pomocnicze wyniki związane z zakładaną regularną zmiennością ψ (Propozycja 3.4 jest nowa), oraz wyniki związane ze zbieżnością do izotropowych rozkładów stabilnych w $\mathbb{R}^d$ (Lemat 3.9).

W Rozdziale 4 bada się dla $\mathbb{Z}^d$ asymptotykę funkcji Greena spaceru Y. Zadanie sprowadza się w zasadzie do badania funkcji Greena $C(n)$ subordynatora τ: w Lemacie 4.1 mamy

$$C(n) \asymp \Gamma(\alpha/2)^{-1} n^{\alpha/2-1} \ell(n),$$

gdzie $\ell(\lambda) = \lambda^{-\alpha/2}/\psi(1/\lambda)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności. Taką *mocną własność odnowy* otrzymuje się gdy $1 < \alpha < 2$ lub $0 < \alpha < 2$ *oraz* ψ jest *specjalnym* wykładnikiem Laplace'a. To ostatnie założenie jest pewną własnością monotoniczności (dla gęstości potencjału odpowiedniego subordynatora z czasem ciągłym). Autor wykorzystuje tutaj twierdzenia tauberowskie. Ciekawe jest także Twierdzenie 4.3 o monotoniczności i logarytmicznej wypukłości $C(n)$, gdzie powyższa struktura τ zadana przez ψ odgrywa decydującą rolę.

Należy dodać, że wyniki pracy stanowią zestawienie rezultatów opublikowanych przez Autora i Promotora w artykułach [2] i [3], uzupełnione przez dodatkowe wyniki na temat nierówności Nasha i Sobolewa w Rozdziale 5. Fragment dowodu Twierdzenia 4.3 pochodzi wyjątkowo od Tomasza Grzywnego.

Wracając do szczegółowego omówienia wyników rozprawy, w Twierdzeniu 4.5 otrzymujemy z dokładnością do stałej multyplikatywnej asymptotykę funkcji Greena spaceru Y. Wykorzystuje się tutaj mocną własność odnowy ciągu $C(n)$ i precyzyjne oszacowania [30] dla rozkładów jednowymiarowych klasycznego spaceru losowego X.

W Rozdziale 5 badane są prawdopodobieństwa $p_B(x)$ trafienia spaceru Y startującego z $x \in \mathbb{Z}^d$ w zbiory $B \subset \mathbb{Z}^d$. Po standardowej dyskusji, w Twierdzeniu 5.7 podaje się test typu Wienera dla masywności. (Zbiór B nazywamy masywnym, jeżeli $p_B \equiv 1$.) Następnie podaje się ostre porównanie pojemności dla Y i dla tzw. subordynowanego procesu Wienera odpowiadającego wykładnikowi Laplace'a ψ. (Jest to proces z ciągłym czasem i ciągłą przestrzenią stanów.) Następnie, z pomocą ubiegłorocznych wyników T. Grzywnego [23] otrzymuje się np. ostre oszacowania pojemności dyskretnych kul itp.

W Rozdziale 6 podane są kryteria masywności, m.in. dla *cierni*

$$\mathcal{T} = \{(x', x_d) : x' \in \mathbb{Z}^{d-1}, x_d \in \mathbb{Z},\ \|x'\| \leqslant t(x_d)\},$$

głównie dla funkcji t spełniających warunek $\lim t(n)/n = 0$, zob. Twierdzenie 6.7. W tym rozdziale ograniczamy się też do $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}$. Rozprawę kończy szczegółowa dyskusja masywności podzbiorów krat $\mathbb{Z}^2$ i $\mathbb{Z}$, w szczególności masywności podzbiorów liczb pierwszych.

Tematyka rozprawy jest klasyczna. Jest zrozumiała i interesująca dla dość szerokiego gremium czytelników. Dyskretna subordynacja jest ważnym pojęciem, które zapewne będzie jeszcze wielokrotnie badane. Autor przedstawia satysfakcjonujący zbiór przykładów (wolno zmieniających się funkcji ℓ, cierni $\mathcal{T}$ itd.) ilustrujących ogólne wyniki. Definiowanie rozkładu zmiennej τ_1 za pomocą ψ jest intrygujące: jest w znacznym stopniu usprawiedliwione przez elegancki dowód Twierdzenia 4.2, ponadto daje związek z problemem momentów i umożliwia użycie rachunku symbolicznego i funkcji tworzących momenty, ale probabilistyczny sens związku pomiędzy $\mathbb{P}(\tau_1 = n)$ a ψ pozostaje dość niejasny dla piszącego te słowa. Chciałoby się mieć także czytelniejsze związki pomiędzy spacerem Y a odpowiednim subordynowanym procesem Wienera z Rozdziału 6, por. $\widetilde{P}^t_\alpha$ w Rozdziale 1. Byłoby również interesujące znaleźć związki z pracami Burdzego i Kulczyckiego oraz Bañuelosa i Bogdana na temat izotropowych stabilnych procesów Lévy'ego w cierniach, stożkach i obszarach parabolicznych.

Rozprawa napisana jest przejrzyście, z zamysłem dydaktycznym i szeroką prezentacją literatury. Autor korzysta z okazji, żeby wyczerpująco przedstawić podstawowe pojęcia i własności, na których buduje swoje wyniki. Wyniki rozprawy nie budzą zastrzeżeń. Zostały też w większości opublikowane w dwóch artykułach, które właśnie ukazały się w dobrych czasopismach.

Oto kilka drugorzędnych zastrzeżeń i sugestii: Znalazłem usterki we wzorze (2.4). Uważam, że (3.1) jest bardziej klarowną definicją dyskretnej subordynacji niż rachunek funkcjonalny w Rozdziale 3.2, gdzie np. nie precyzuje się, na jakich funkcjach działają rozważane operatory. Nawiasem mówiąc, chyba warto byłoby od razu wskazać na nieujemność współczynników Taylora funkcji $1-\psi(1-x)$, co pozwala na bezproblemowe nakładanie rozważanych operatorów na funkcje nieujemne. Ponadto argument dotyczący wzoru (3.7) jest właściwie powtarzany w (3.14). Wydaje się, że indukcja w Propozycji 3.4 niepotrzebnie skomplikowana, i że wystarczy indukcyjnie dowodzić iż $(-1)^{n+1}\psi^{(n)} \in \mathcal{R}_{\alpha/2-n}(0^+)$. Dowód Twierdzenie 3.5 prosi się o wspomnienie Propozycji 3.4. W dowodzie Propozycji 3.6 nie jest wystarczająco jasne, czy b jest zdefiniowane. Brak jest symbolu splotu w dyskusji obszarów przyciągania na początku Rozdziału 3.5. Na stronie 25 używane są dwie notacje $c^{(k)}(n) = C_\psi(n,k)$. Odwołania na stronie 26 do (4.1) i (4.2) są chyba niepoprawne. Wzmianka na str. 28 o wzorze Eulera na odbicie powinna pojawić się wcześniej. Asymptotyka $O((2/e)^k)$ na str. 29 jest chyba nieodpowiednia. Zdanie poprzedzające Twierdzenie 4.3 jest niejasne. Notacja $\left(\frac{1}{\psi(1)}\right)^{(k)}$ w dowiedzie Twierdzenia 4.3 jest problematyczna. Uwaga 4.4 mogłaby pojawić się wcześniej. W dyskusji funkcji ekscesywnych na str. 38-39 potrzebna jest chyba uwaga o punktowej skończoności. Na str. 47 lepiej pisać $Q(b) = [0,1]^d + b$. Symbol N w trzeciej linii od dołu na str. 50 jest niezrozumiały.

Powyższe uwagi nie zmniejszają mojej bardzo pozytywnej oceny przedłożonej rozprawy. Niewątpliwie przedłożona rozprawa spełnia ona z ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z zakresu matematyki. Wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.