27 czerwca 2014

dr hab. Anna Talarczyk-Noble, prof. UW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Łukasza Wojciechowskiego "Analiza stochastyczna procesów Lévy'ego"

Rozprawa doktorska mgr Łukasza Wojciechowskiego poświęcona jest zagadnieniom związanym z systemami Lévy'ego, całkami względem miar losowych Poissona oraz zastosowaniom do oszacowań norm mnożników Fouriera.

W Rozdziale 2 rozprawy rozważa się tzw. systemy Lévy'ego, tj. sumy postaci

$$\sum_{\substack{0<u_1<\ldots<u_n<\infty \\ \Delta X_{u_k}\neq 0, k=1,\ldots,n}} F(u_1, X_{u_1-}, X_{u_1}; \ldots, u_n, X_{u_n-}, X_{u_n}), \tag{1}$$

gdzie X jest procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Badana jest wartość oczekiwana powyższej zmiennej losowej.

Ze względu na fakt, iż skoki procesu Lévy'ego opisane są przez miarę losową Poissona, wyrażenie (1) daje się zapisać przy pomocy wielokrotnej całki względem tej miary losowej Poissona. Wiele wyników z tego rozdziału jest znanych z teorii całkowania względem miar losowych Poissona - w pracy przedstawiono tylko ich inne dowody. Na przykład dla $n = 1$ wyrażenie (1) ma postać:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} F(s, X_{s-}, X_{s-} + y)\pi(dsdy),$$

gdzie $\pi = \sum_{s:\Delta X_s\neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}$ jest miarą losową Poissona na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ z miarą intensywności $\ell \otimes \nu$, gdzie ℓ jest miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}_+$, a ν jest miarą Lévy'ego. π jest niezależna od części gaussowskiej procesu Lévy'ego.

Dobrze wiadomo, że jeżeli π jest miarą losową Poissona jw., a $\phi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ jest procesem mierzalnym, prognozowalnym i nieujemnym (albo całkowalnym w odpowiednim sensie) to zachodzi tzw. wzór kompensacyjny

$$\mathbb{E}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\pi(dsdy) = \mathbb{E}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)ds\nu(dy).$$

Ponadto, przy założeniu odpowiedniej całkowalności ϕ z kwadratem, proces

$$M_t = \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\hat{\pi}(dsdy),$$

gdzie $\hat{\pi}$ oznacza skompensowaną miarę losową π, jest martyngałem całkowalnym z kwadratem o nawiasie skośnym $\langle M\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)^2 ds\nu(dy)$ i wariacji kwadratowej $[M]_t = \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)^2\pi(dsdy)$. (Patrz np. Peszat, Zabczyk:"Stochastic partial differential equations with Lévy noise", rozdz. 8.7) W rozdziałach 2.1 i 2.4 rozprawy przeprowadzono dowody tych faktów dla ϕ specjalnej postaci. Znane mi dowody tych twierdzeń opierają się na przybliżaniu ϕ procesami elementarnymi, a następnie przejściu granicznym. W rozprawie przyjęto inną, również dość naturalną strategię, opierającą się na rozkładzie procesu Lévy'ego na niezależną część gaussowską oraz część skokową (skompensowaną), którą przybliża się (skompensowanymi) złożonymi procesami Poissona.

Jako powód przedstawienia nowego dowodu autor podaje argument jego elementarności. O ile pierwsza część, tj. wzór kompensacyjny, jest rzeczywiście dość prosta, o tyle zalety takiego podejścia w przypadku rozdziału 2.4 są już dla mnie trochę mniej widoczne, gdyż rachunki robią się dość skomplikowane.

W Rozdziale 2.2 bada się wartość oczekiwaną wyrażeń postaci (1) a w rozdziale 2.3 wyrażeń mieszanych, gdzie w wyrażeniu odpowiadającym (1) część całek wzięta jest względem miary losowej π, a pozostałe względem kompensatora. Ściślej, w rozdziale 2.3 rozważa się tylko $n = 2$, a przypadek ogólny omówiony jest w rozdziale 4. Wyniki te wydają się prawie oczywiste, takie, jakich należało się spodziewać, zwłaszcza po przywołaniu wzoru Palma, jednak sądzę, że są nowe, przynajmniej w tej ogólności, co w pracy doktorskiej. Pewne pośrednie rezultaty (dla wielokrotnych całek względemi miar losowych Poissona) były wcześniej znane, patrz np. iterowany wzór Mecke-Palma (2.10) z pracy Last, Penrose: "Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities", PTRF 2011 (odsyłacz do wcześniej opublikowanej książki Penrose: "Random geometric graphs", 2003, Tw. 1.6). Ze wzoru tego wynika natychmiast Lemat 2.2.1.

Wydaje się, że niektóre dowody z tej części rozprawy dałoby się uprościć. Np. w Lemacie 2.3.1 dowód równości (2.14) i (2.17) można sprowadzić po prostu do zastosowania Lematu 2.1.1 poprzez zapisanie drugiego wzoru na str. 10 od razu dla $t = \infty$ (jest tam drobny błąd - za wcześnie pojawia się z_0, zamiast $X_{S_i}, X_{S_i} + z_0$ powinno być X_{S_i-}, X_{S_i}), następnie zwarunkowania i-tego wyrazu sumy względem $\mathcal{F}_{S_i}$, gdzie $(\mathcal{F}_t)_t$ - σ-ciało generowane przez proces X, oraz skorzystania z faktu, że $(X_{S_i+u} - X_{S_i})_{u\geq 0}$ jest złożonym procesem Poissona niezależnym od $\mathcal{F}_{S_i}$. Otrzymuje się wtedy postać taką jak w Lemacie 2.2.1 bez potrzeby rozpisywania wszystkich całek jak na stronach 10-11.

Najciekawszy wydaje się trzeci rozdział rozprawy, dotyczący zastosowań martyngałów opisanych w rozdziale 2 do badania mnożników Fouriera. Mnożnik Fouriera odpowiadający symbolowi $m : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ ograniczonemu co do modułu przez 1 jest operatorem na $L^2(\mathbb{R}^d)$ zdefiniowanym przy pomocy transformaty Fouriera przez $\widehat{Mf} = m\hat{f}$. W Rozdziale 3 rozprawy bada się oszacowania p-tych norm operatora M. Wykorzystuje się w tym celu metodę stosowaną wcześniej przez Bañuelosa i Bogdana, polegającą na rozważeniu martyngałów związanych z procesami Lévy'ego, postaci takiej jak w drugiej części rozprawy i wykorzystaniu oszacowań typu Burkholdera-Wanga dla dominowanych martyngałów. Otrzymuje się w ten sposób oszacowania norm L^p dla dość dużej klasy mnożników Fouriera. W rozprawie stosuje się metodę opisaną wyżej dla dwóch różnych procesów Levy'ego otrzymując w ten sposób oszacowania dla klasy niesymetrycznych mnożników Fouriera.

Część ta pochodzi ze wspólnego artykułu Doktoranta z promotorem prof. Krzysztofem Bogdanem, opublikowanego w czasopiśmie Probability and Mathematical Statistics. W swoim oświadczeniu prof. Bogdan pisze, że wkład obu współautorów ocenia jako równy. Z oświadczenia wnioskuję także, że najbardziej kluczowe pomysły - np. rozważenie dwóch różnych procesów Levy'ego i jakich - pochodzą od prof. Bogdana. Techniki dowodowe są bardzo zbliżone do tych z pracy Bogdana i Bañuelosa.

Tę część pracy uważam za najciekawszą, jednakże czytając ją miałam wrażenie pewnego niedosytu. Ponieważ rozprawa doktorska ma zwykle trochę inny charakter niż artykuł naukowy, dobrze by było gdyby znalazło się tu nieco więcej informacji o znaczeniu mnożników Fouriera i ich zastosowaniach, a także przykładów problemów, w których pojawiają się mnożniki rozważane w rozprawie. Postać symbolu m podana we wzorze (3.12) bądź (3.7) jest dość złożona. Podano przykłady mnożników tej postaci. Jednak nasuwa się naturalne pytanie o charakteryzację symboli, które tak się zapisują, albo dla których można otrzymać oszacowania poprzez przejście graniczne.

W ostatnim rozdziale następuje powrót do zagadnień omawianych w drugim rozdziale pracy, tym razem dla procesów Lévy'ego bez części gaussowskiej, prezentując podejście do systemów Lévy'ego przy pomocy wzoru Mecke-Palma. W Lemacie 4.2.1 uogólniono wspomniany wyżej iterowany wzór Mecke-Palma (wzór (2.10) z pracy Lasta i Penrose'a) na całki mieszane (część wielokrotnych całek wzięta względem miary kompensatora). Ten lemat łatwo wynika z iterowanego wzoru Mecke-Palma dla wielokrotnych całek względem miary losowej Poissona.

Wyprowadzony jest także wzór na momenty mieszane kilku różnych całek względem tej samej miary losowej Poissona (Twierdzenie 4.3.1 rozprawy). Jest to uogólnienie wzoru na momenty z pracy Privaulta. Wynik z konieczności pisze się w dość złożonej postaci i wcześniej nie spotkałam się z takimi wzorami wypisanymi jawnie. Jednakże, znów, jego dowód jest dość oczywisty - wielokrotne całki względem miary losowej Poissona pisze się jako wielokrotne sumy, które następnie się rozdziela na sumy gdzie wszystkie atomy są różne i takie, gdzie pewne elementy są równe - wartości oczekiwane tych ostatnich sprowadzają się do iterowanego wzoru Mecke-Palma dla całek niższej krotności. To twierdzenie więc jest znów mało zaskakujące - jedyne trudności sprawia tu porządny zapis. Sama metoda nie wydaje się zbyt odkrywcza -już wcześniej była świadomość, że wzór Palma może służyć do badania dość skomplikowanych funkcjonałów związanych z miarami losowymi Poissona (np. książka Bertoina: "Random fragmentation and coagulation processes").

W Rozdziale 4.4 ze wzorów na wartość oczekiwaną iterowanych całek względem miary losowej Poissona wyprowadzane są odpowiednie wzory dla systemów Lévy'ego, przy założeniu, że proces Lévy'ego X ma zerową część gaussowską.

Uwaga techniczna do konstrukcji miary losowej Poissona na przestrzeni konfiguracji: Czytając tę część miałam poczucie, że jest ona mało przyjazna czytelnikowi. Wydaje mi się, że lepiej byłoby podać standardową konstrukcję miary losowej Poissona dzieląc przestrzeń na sumę rozłącznych zbiorów E_i o skończonej mierze intensywności σ, na każdym z nich konstruując miarę losową Poissona przy pomocy niezależnych zmiennej los. Poissona i zmiennych o rozkładach $\sigma(\cdot \cap E_i)/\sigma(E_i)$ a następnie zdefiniować miarę probabilistyczną $\mathbb{P}$ na $\Omega_{\mathbb{X}}$ jako rozkład tej punktowej miary losowej (utożsamianej ze zbiorem swoich atomów). Uwaga terminologiczna: na początku rozdziału 4.1 mowa jest o miarach lokalnie skończonych (tj. skończonych na zbiorach zwartych, $\mathbb{X}$ lokalnie zwarta), natomiast na początku rozdziału 4.4 stosuje się wcześniejsze twierdzenia do miar losowych Poissona na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ z miarą intensywności $du\nu(dz)$, które na ogół nie są lokalnie skończone. Należałoby więc nieco zmodyfikować sformułowania rozdz. 4.1, co nie stanowi problemu.

Rozprawa doktorska jest bardzo krótka – ma tylko 43 strony. Jak już wspomniałam za najbardziej wartościową uważam część dotyczącą mnożników Fouriera. Do badania norm L^p mnożników Fouriera używa się technik martyngałowych dla martyngałów związanych z procesami Lévy'ego. Otrzymuje się oszacowania dla całej klasy mnożników, w tym niesymetrycznych. Z oświadczenia wynika, że w tę część dość duży wkład miał Promotor. Ponadto, schemat dowodu jest dość podobny do dowodu z wcześniejszej pracy Bañuelosa i Bogdana. Pozostałe wyniki rozprawy stanowią albo inne dowody już wcześniej znanych twierdzeń, albo nowe, ale nie specjalnie odkrywcze twierdzenia. Moim zdaniem można by je uznać raczej za pewnego rodzaju rzemieślnictwo. Na obronę można powiedzieć, że mimo iż mechanizm zachowania np. momentów całek względem miar losowych Poissona wydaje się w zasadzie jasny, na podstawie wcześniejszych, dobrze znanych twierdzeń, jednak do niedawna trudno było znaleźć systematyczne omówienie tego zagadnienia w przypadku funkcji podcałkowych niedeterministycznych. Dopiero w ostatnich latach pojawiło się kilka prac bardziej wnikliwie omawiających te problemy. Prezentowana praca doktorska wpisuje się w ten cykl.

Podsumowując, sądzę że przedstawiona rozprawa spełnia formalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim i jako taka kwalifikuje się być podstawą do nadania stopnia doktora, jednakże za mało w niej ciekawych pomysłów i nowych ważnych wyników, aby uznać ją za wyróżniającą.

Anna Talarczyk-Noble