

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: Analiza danych*

Jan Kozłowski

## Losowe zbiory Cantora

Praca dyplomowa  
napisana pod kierunkiem  
dr. Piotra Dyszewskiego

Wrocław 2023

# §1 Wstęp

Spotykając się po raz pierwszy ze zbiorem Cantora poznajemy go przez następującą konstrukcję: weźmy odcinek  $[0, 1]$ , usuńmy z niego odcinek  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  dostając zbiór  $C_1$ . W drugim kroku w obu składowych zbioru  $C_1$  czyli  $[0, \frac{1}{3}]$  oraz  $[\frac{2}{3}, 1]$  usuwamy ich środki długości  $\frac{1}{3}$  ich długości dostając zbiór  $C_2$ . Tę operację powtarzamy dostając ciąg zbiorów  $(C_n)_{n \geq 1}$ , z którego możemy stworzyć zbiór Cantora wzorem

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{i \geq 1} C_i.$$

Zauważmy, że możemy w inny sposób wybierać jaką część danego przedziału usuwamy, nie musi być to jedna trzecia. Możemy dla przedziału  $[a, b]$  wylosować niezależnie dwie liczby z rozkładu jednostajnego na przedziale  $[0, \frac{b-a}{2}]$ , a następnie podzielić go na dwa przedziały  $[a, x]$  i  $[b - y, b]$  i proces ten powtarzać otrzymując nowy (losowy) zbiór Cantora. Pierwszym pytaniem, które powinniśmy sobie zadać jest to, czy ten zbiór spełnia definicję zbioru Cantora, i czy możemy o nim powiedzieć coś jeszcze.



Rysunek 1: Losowa konstrukcja zbioru Cantora

Tematem pracy jest opisanie konstrukcji i udowodnienie własności losowych zbiorów Cantora. Rozdział pierwszy wprowadza potrzebne definicje. W drugim udowodnimy, że podana konstrukcja rzeczywiście jest zbiorem Cantora. W rozdziale trzecim udowodnimy twierdzenie o wymiarze Hausdorffa takiego losowego zbioru. Na końcu przeprowadzimy konstrukcję kilku przykładowych zbiorów wraz z policzeniem ich wymiaru Hausdorffa.

Praca oparta jest na rozdziałach 5.1 oraz 5.2 z podręcznika [1], oraz na [2].

## §2 Pojęcia wstępne

### 2.1 Definicje

Do pracy z losowymi zbiorami Cantora będziemy potrzebować kilku definicji. Na potrzeby tej pracy spójrzmy na losowy zbiór w sposób analogiczny do "zwykłej" zmiennej losowej.

**Definicja 2.1.** Niech  $D$ , to zbiór zwartych podzbiorów  $\mathbb{R}^m$ , a  $(\Omega, \mathbb{P}, \mathfrak{F})$  to przestrzeń probabilistyczna. Funkcję  $X : \Omega \rightarrow D$  nazwiemy losowym zbiorem, jeśli dla każdego  $d \in D$  mamy  $X^{-1}(d) \in \mathfrak{F}$ .

**Definicja 2.2.** Powiemy, że dwa zbiory  $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$  są do siebie geometrycznie podobne, jeśli jeden z nich można przekształcić w drugi za pomocą translacji, odbicia rotacji oraz przeskalowania.

**Definicja 2.3.** Zbiór  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  nazwiemy zbiorem Cantora, jeśli jest zwarty, domknięty, wszędzie gęsty oraz miary zero.

Na potrzeby przyszłych rozważań niech  $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$  to zbiór ciągów składających się z liczb naturalnych (gdzie  $\mathbb{N}^0 = \emptyset$ ). Dla  $n \in \mathbb{N}^*$  niech  $|n|$  oznacza długość tego ciągu. Dodatkowo, niech  $*$  oznacza konkatencję dwóch ciągów, czyli na przykład  $(1, 3, 4) * (5, 6) = (1, 3, 4, 5, 6)$ , a  $2 * (3, 4, 5) = (2, 3, 4, 5)$ , a  $v|k$  oznacza pierwsze  $k$  elementów ciągu  $v$ . Mając te oznaczenia możemy zdefiniować losowy zbiór Cantora:

**Definicja 2.4** (Losowy zbiór Cantora). Niech  $J$  to niepusty zwarty podzbiór  $\mathbb{R}^m$ , taki że  $\lambda(\text{Int}(J)) = \lambda(J) > 0$ , gdzie  $\lambda$  oznacza  $m$ -wymiarową miarę Lebesgue'a. Załóżmy, że mamy rodzinę losowych podzbiorów  $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{J} = \{J_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^*\},$$

spełniających następujące właściwości:

**Założenie 1.**  $J_\emptyset(\omega) = J$  dla prawie każdej  $\omega \in \Omega$ . Dodatkowo dla każdej  $\sigma \in \mathbb{N}^*$  oraz dla prawie każdej  $\omega \in \Omega$  jeśli  $J_\sigma(\omega)$  jest niepusty, to jest on geometrycznie podobny do  $J$ .

**Założenie 2.** Dla prawie każdego  $\omega \in \Omega$  i każdego  $\sigma \in \mathbb{N}^*$  elementy ciągu  $\{J_{\sigma*i}(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$  mają własność taką, że ich wnętrza są parami nieprzecinające się oraz

$$\lambda(J_\sigma(\omega) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{\sigma*i}(\omega)) > 0.$$

**Założenie 3.** Niech

$$T_{\sigma*n}(\omega) := \frac{\text{diam}(J_{\sigma*n}(\omega))}{\text{diam}(J_\sigma(\omega))},$$

gdzie  $\text{diam}$  oznacza średnicę zbioru. Oznaczmy  $T_\emptyset(\omega) = \text{diam}(J)$ . Zakładamy, że ciąg  $\tau_\sigma = \{T_{\sigma*i}(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$  jest i.i.d.

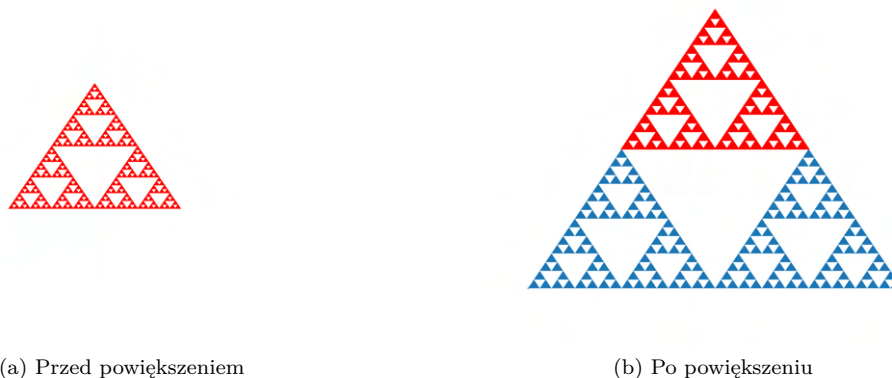
Wtedy możemy zdefiniować losowy zbiór Cantora

$$K(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^n} J_\sigma(\omega).$$

## 2.2 Wymiar Hausdorffa

Intuicyjnie wymiar obiektu możemy zdefiniować następująco: jeśli jest równy  $n$ , to znaczy, że gdy w tym obiekcie zwiększymy każdy bok dwukrotnie, to "zmieści się w nim"  $2^n$  nieprzeskalowanych obiektów. Dla kwadratu, gdy każdy bok zwiększymy dwukrotnie, to pole zwiększy się  $2^2$  krotnie. Jednak tę intuicję przenieśliśmy na fraktale, to doszlibyśmy do zaskakujących wyników.

Rozważmy to na przykładzie trójkąta Sierpińskiego. Możemy go skonstruować w następujący sposób: weźmy trójkąt równoboczny, podzielmy go na cztery przystające trójkąty równoboczne i usuńmy środkowy z nich. Następnie procedurę wycinania powtórzmy na pozostałych trójkątach. Zastanówmy się teraz, co się stanie, gdy w tym trójkącie Sierpińskiego zwiększymy długość boku dwukrotnie.



(a) Przed powiększeniem

(b) Po powiększeniu

Rysunek 2: Trójkąt Sierpińskiego

Widzimy, że w powiększonym dwukrotnie trójkącie możemy zmieścić 3 mniejsze, czyli, że zgodnie z intuicją wymiar byłby równy  $\log_2(3)$ , czyli nie byłby liczbą ani całkowitą ani nawet wymierną!

Dla badania wymiarów fraktali będziemy więc używać nowej definicji wymiaru:

**Definicja 2.5.** Funkcję  $\mathcal{H}_\theta^m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, \infty]$  o wzorze

$$\mathcal{H}_\theta^m(A) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^\theta : (A_n)_{n \geq 1} \text{ to } \epsilon\text{-pokrycie } A \right\}$$

nazywamy  $\theta$ -wymiarową (zewnątrzną) miarą Hausdorffa, gdzie  $(A_n)_{n \geq 1}$  to  $\epsilon$ -pokrycie  $A$ , jeżeli  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$  oraz dla każdego  $n$ ,  $\text{diam}(A_n) < \epsilon$ .

**Definicja 2.6.** Dla zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  definiujemy jego wymiar Hausdorffa  $\dim_H A \in [0, \infty]$  jako jedyną liczbę taką, że dla  $\theta < \dim_H A$  mamy  $\mathcal{H}_\theta^m(A) = \infty$ , a dla  $\theta > \dim_H A$  mamy  $\mathcal{H}_\theta^m(A) = 0$ .

## §3 Własności losowych zbiorów Cantora

Na konstrukcję naszego losowego zbioru Cantora możemy patrzeć, jak na proces gałązkowy Galtona-Watsona, gdzie  $n$ -te pokolenie to liczba niepustych zbiorów  $J_v$  gdzie  $|v| = n$ , dodatkowo możemy każdej gałęzi przyporządkować stosunek średnic, to znaczy gałęzi z  $J_v$  do  $J_{v*i}$  przyporządkowujemy wartość  $T_{v*i}$ . Zauważmy, że jeśli średnia liczba potomków w tym procesie jest mniejsza lub równa 1, to proces prawie na pewno wymrze, co w naszej konstrukcji oznaczałoby, że przekrój byłby prawie na pewno pusty. Dlatego dodajmy jeszcze jedno założenie do naszej konstrukcji:

**Założenie 4.**

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{J_i \neq \emptyset}\right] > 1.$$

Mając to założenie wiemy, że z dodatnim prawdopodobieństwem, w każdym pokole- niu będzie niepusty zbiór  $J_v$ .

Zacznijmy od obserwacji, że losowy zbiór Cantora pod warunkiem, że jest niepusty to spełnia definicje zbioru Cantora. Jako że jesteśmy w przestrzeni metrycznej, takiej że  $X = \mathbb{R}^m$ , to zbiór  $J$  jest domknięty i ograniczony (ponieważ jest zwarty), dodatkowo dla dowolnego  $\sigma \in \mathbb{N}^*$  zbiór  $J_\sigma$  jest geometrycznie podobny do  $J$ , więc ma takie same własności topologiczne. Dla dowolnego  $n$  skończona suma  $\bigcup_{|\sigma|=n} J_\sigma$  zbiorów domkniętych jest domknięta, łącząc to z faktem, że przeliczany przekrój zbiorów domkniętych jest domknięty, to zbiór  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^n} J_\sigma$  jest domknięty, ale jest też ograniczony przez  $J$ , więc jest też zwarty.

Zajmijmy się teraz brakiem punktów izolowanych. Ustalmy dowolny  $x \in K$  oraz  $\epsilon > 0$ . Możemy znaleźć ciąg świadczący o tym, że  $x \in K$ , czyli  $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , takie że dla każdego  $k \geq 1$  mamy  $x \in J_{\sigma|k}$ . Poniżej udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(J_{\sigma|n}) = 0, \quad (**)$$

więc istnieje  $k_1$ , takie że  $\text{diam}(J_{\sigma|k_1}) < \epsilon$ . Dla każdego  $k \geq k_1$  zbiór  $J_{\sigma|k}$  ma dodat- nią szansę mieć innego potomka niż  $J_{\sigma|(k+1)}$  a ten potomek niezerową szansę, że jako nowy proces gałązkowy nie wygaśnie (z założenia 3 i 4), czyli skoro dzieje się to dla nieskończenie wielu  $k$  to musi istnieć  $v \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , takie że  $v|k_1 = \sigma|k_1$ ,  $v \neq \sigma$  oraz istnieje  $y \in \bigcap_{i \geq 1} J_{v|i}$ . Wtedy  $y \in K$ ,  $x \neq y$  oraz odległość pomiędzy  $x$  a  $y$  jest mniejsza niż  $\epsilon$ , ponieważ oba należą do  $J_{\sigma|k_1}$ , czyli  $x$  nie jest punktem izolowanym zbioru  $K$ .

Ostatnią własnością naszego zbioru, którą musimy udowodnić jest to, że jego miara Lebesgue'a wynosi zero. Do tego będziemy potrzebować kilku oznaczeń. Niech dla  $v \in \mathbb{N}^*$  mamy  $L(v) = \prod_{i=1}^{|v|} T_{v|i}$ . Na  $L(v)$  możemy patrzeć jak na iloczyn liczb, które odwiedzimy idąc po drzewie od korzenia do wierzchołka  $J_v$ , ale pamiętając, że  $T_{v*i} = \frac{\text{diam}(J_{v*i})}{\text{diam}(J_v)}$  otrzymujemy  $L(v) = \frac{\text{diam}(J_v)}{\text{diam}(J)}$ . Dodatkowo niech

$$Y_{\theta,n} = \sum_{|v|=n} L(v)^\theta.$$

Chcielibyśmy znaleźć martyngał związany z  $Y_{\theta,n}$  z naturalną filtracją  $\mathcal{F}_n = \sigma(\{J_v : |v| \leq n\})$ . Policzmy warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}\left[Y_{\theta,n+1} | \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n+1} L(v)^\theta | \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta} | \mathcal{F}_n\right].$$

Z addytywności warunkowej wartości oczekiwanej możemy z nią wejść pod znak zewnętrznej sumy.

$$\mathbb{E}\left[Y_{\theta,n+1} | \mathcal{F}_n\right] = \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[\frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta} | \mathcal{F}_n\right].$$

Zauważmy, że dla  $|v| = n$  zmienna  $\frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}$  jest  $\mathcal{F}_n$ -mierzalna, a suma indeksowana po

$i$  jest niezależna od  $\mathcal{F}_n$  z założenia 3, więc

$$\mathbb{E}\left[Y_{\theta,n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta}\right] = Y_{\theta,n} \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}\right],$$

gdzie ostatnia równość wynika z identyczności rozkładu wektora  $(T_i)_{i=1}^\infty$ . Oznaczmy  $\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} T_i^\theta\right]$ . Wtedy  $\Phi(\theta)^{-n} Y_{\theta,n}$  jest nieujemnym martyngałem, więc z twierdzenia Doob'a jest zbieżny. Przyjrzyjmy się bliżej  $\Phi(\theta)$ .

Zacznijmy od lematu

**Lemat 3.1.** *Dla dowolnych geometrycznie podobnych  $A, B \in \mathbb{R}^m$ , takich że  $\lambda(B) \neq 0$  mamy*

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{\text{diam}(A)^m}{\text{diam}(B)^m}.$$

*Dowód.* Skoro  $A, B$  są geometrycznie podobne, to możemy znaleźć takie  $B'$ , że  $\lambda(B) = \lambda(B')$ ,  $\text{diam}(B) = \text{diam}(B')$ ,  $B'$  można uzyskać z  $B$  za pomocą translacji, odbicia i rotacji, oraz istnieje  $\delta \in \mathbb{R}$ , taka że  $\delta B' := \{\delta b : b \in B'\} = A$ . Wtedy z własności  $m$ -wymiarowej miary Lebesgue'a otrzymujemy  $\lambda(A) = \delta^m \lambda(B')$ , dodatkowo mamy  $\text{diam}(\delta B') = \delta \text{diam}(B')$  i łącząc dwie ostatnie równości dostajemy tezę. ■

Niech  $\theta = m$  oszacujmy sumę

$$\sum_{i \geq 1} T_i^m = \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^m}{\text{diam}(J)^m} = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(J_i)}{\lambda(J)} = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(\text{Int}(J_i))}{\lambda(\text{Int}(J))},$$

gdzie ostatnia równość wynika z naszego założenia, że  $\lambda(J) = \lambda(\text{Int}(J))$ , a  $J_i$  jest geometrycznie podobny do  $J$ . Następnie korzystając z tego, że wnętrza  $J_i$  są parami rozłączne mamy

$$\sum_{i \geq 1} T_i^m = \frac{\lambda(\cup_{i \geq 1} \text{Int}(J_i))}{\lambda(\text{Int}(J))} < 1$$

z założenia 2. Wtedy również mamy  $\Phi(\theta) < 1$ , ponieważ jeśli zmienna losowa  $X \leq 1$  prawie wszędzie, to  $\mathbb{E}[X] \leq 1$ . Wróćmy teraz do naszego martyngału i zauważmy, że z **lematu** otrzymujemy, że

$$L(v)^m = \frac{\text{diam}(J_v)^m}{\text{diam}(J)^m} = \frac{\lambda(J_v)}{\lambda(J)},$$

więc wtedy

$$Y_{m,n} = \sum_{|v|=n} \frac{\lambda(J_v)}{\lambda(J)} \geq \frac{\lambda(\cup_{|v|=n} J_v)}{\lambda(J)}.$$

Pokażemy teraz, że  $Y_{m,n}$  dąży do 0 przy  $n \rightarrow \infty$ , co pociąga (\*\*). Na początek policzmy granicę  $\mathbb{E}[Y_{m,n}]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_{m,n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(m)^n \mathbb{E}[\Phi(m)^{-n} Y_{m,n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(m)^n \mathbb{E}[\Phi(m)^0 Y_{m,0}] = 0,$$

ponieważ martyngały mają stałą średnią, a  $\Phi(m) < 1$ . Ale  $Y_{\theta,n}$  jest nieujemne, więc również  $Y_{m,n}$  dąży do zera prawie na pewno. Wtedy z twierdzenia o trzech ciągach

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{|v|=n} J_v) = 0$  prawie na pewno, a wtedy mamy

$$\lambda(K) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|v|=n} J_v\right) = 0,$$

co kończy dowód zerowej miary losowego zbioru Cantora.

## §4 Twierdzenie o wymiarze losowego zbioru Cantora

Przejdźmy teraz do głównego twierdzenia dotyczącego wymiaru Hausdorffa

**Twierdzenie 4.1** (R. Daniel Mauldin, S. C. Williams [2]). *Dla oznaczeń z poprzedniego rozdziału zdefiniujmy  $\alpha$  jako*

$$\alpha = \inf\{\theta \geq 0 : \Phi(\theta) \leq 1\}.$$

Wtedy  $\alpha \leq m$  oraz

$$P(\dim_H K = \alpha | K \neq \emptyset) = 1.$$

*Dowód.* Tutaj udowodnimy prostszą część dowodu to znaczy nierówność  $\dim_H K \leq \alpha$ . Drugą część można znaleźć w [2] oraz [1]. Na początku przypomnijmy, że  $\Phi(m) < 1$ , więc mamy  $\alpha \leq m$ . Jako że  $T_i$  jest mniejsze od 1, to dla  $\theta \in [\alpha, m]$  mamy  $\Phi(\theta) < 1$ . Dla takich  $\theta$  mamy również

$$Y_{\theta,n} = \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \leq \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^m}{\text{diam}(J)^m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $\lambda(J) = 1$ . Przypomnijmy teraz wzór na miarę Hausdorffa

$$\mathcal{H}_\theta^m(A) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^\theta : (A_n)_{n \geq 1} \text{ to } \epsilon\text{-pokrycie } A \right\}.$$

Ustalmy  $\epsilon > 0$ . Naszym kandydatem na  $\epsilon$ -pokrycie zbioru  $K$  jest  $(J_v)_{|v|=n}$ . Jako że  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0$  to znajdziemy takie  $n_0$ , że  $Y_{\theta,n_0} < \epsilon$ . Wtedy dla każdego  $|v| = n_0$  mamy  $L(v) < \epsilon$ , więc znaleźliśmy pokrycie świadczące o tym, że

$$\mathcal{H}_\theta^m(K) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v|=n} \text{diam}(J_v)^\theta,$$

ale gdy  $\theta \leq \alpha$  mamy  $\Phi(\theta) < 1$ , a wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v|=n} \text{diam}(J_v)^\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0,$$

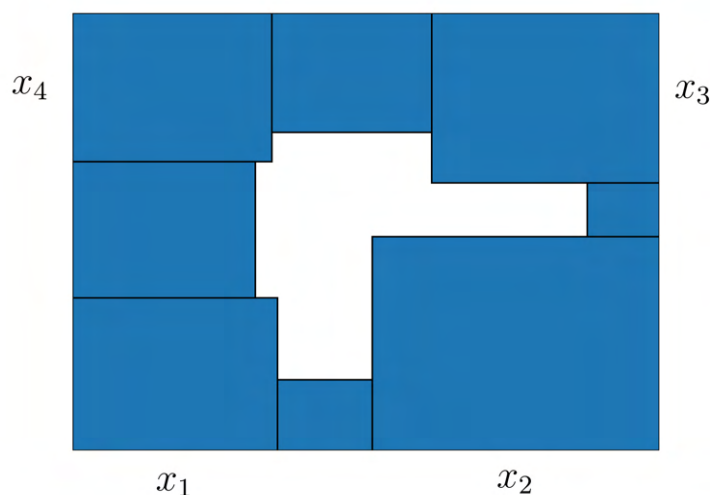
co pokazuje, że  $\dim_H K \leq \alpha$ . ■

## §5 Przykłady

### 5.1 Losowy dywan Sierpińskiego

Zajmijmy się stworzeniem kilku losowych zbiorów Cantora. Zwykły (deterministyczny) dywan Sierpińskiego, to fraktal o następującej konstrukcji: weźmy kwadrat, podzielmy go na 9 mniejszych równych kwadratów (umieszczonych w 3 rzędach), oraz usuńmy środkowy z nich. Ten proces powtarzamy na mniejszych kwadratach. Konstrukcję tę można urozmaicić dodając do niej element losowy.

Zacznijmy od kwadratu o długości 1. Niezależnie wylosujemy 4 liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4$  z rozkładu jednostajnego na przedziale  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ . Na wierzchołkach kwadratu zaznaczymy kwadraty o długościach  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Następnie pomiędzy tymi kwadratami zaznaczamy kwadraty tak, by zajęły całą długość boków kwadratu. Tak powstają nam kwadraty  $J_1, J_2, \dots, J_8$ .



Rysunek 3: Pierwsza iteracja losowego dywanu Sierpińskiego

Możemy się zastanawiać, dlaczego liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4$  musimy losować z takiego przedziału. Wtedy wartość  $1 - (x_1 + x_2)$ , czyli długość boków "małych kwadratów" należy do przedziału  $[0, \frac{1}{3}]$ , czyli wiemy, że ten mały kwadrat będzie istniał i nie pokryje się z żadnym innym kwadratem.

Użyjmy teraz naszego twierdzenia o wymiarze losowego zbioru Cantora, do zbadania wymiaru tego zbioru. Zauważmy, że z niezależności losowań  $x_1, x_2, x_3, x_4$  mamy  $\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \mathbb{E}[T_2^\alpha] = \mathbb{E}[T_3^\alpha] = \mathbb{E}[T_4^\alpha]$  oraz  $\mathbb{E}[T_5^\alpha] = \mathbb{E}[T_6^\alpha] = \mathbb{E}[T_7^\alpha] = \mathbb{E}[T_8^\alpha]$  dlatego

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^8 \mathbb{E}[T_i^\alpha] = 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 4 \mathbb{E}[T_5^\alpha].$$

Pochylny się nad wyliczeniem  $\mathbb{E}[T_1^\alpha]$ . Średnica kwadratu o boku  $a$  ma długość  $a\sqrt{2}$ , więc  $T_1^\alpha = (\frac{x_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^\alpha = x_1^\alpha$ , dlatego

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \mathbb{E}[x_1^\alpha] = \int x^\alpha f_1(x) dx,$$



gdzie  $f_1(x) = 6\mathbb{1}_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}(x)$  jest gęstością rozkładu  $x_1$ ,

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = 6 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx = 6 \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\alpha+1} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} \right].$$

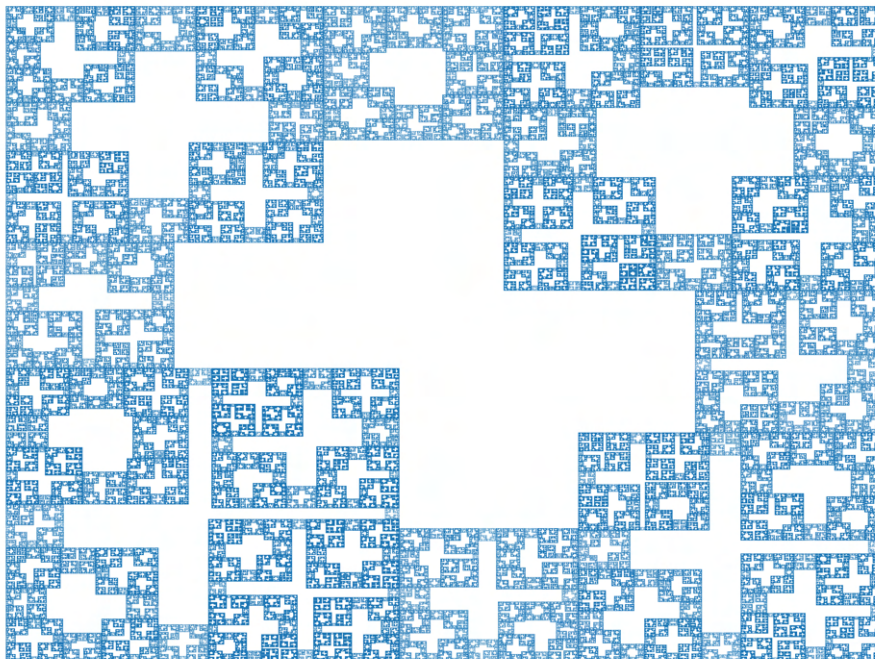
Teraz spójrzmy na  $\mathbb{E}[T_5^\alpha]$ , w tym przypadku długość boku wynosi  $1 - (x_1 + x_2)$ , więc  $T_5^\alpha = \left(\frac{1-(x_1+x_2)\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^\alpha = (1 - (x_1 + x_2))^\alpha$ . Losowania  $x_1$  i  $x_2$  są niezależne, więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_5^\alpha] &= \int \int (1 - (x + y))^\alpha f_1(x) f_2(y) dy dx = 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (1 - (x + y))^\alpha dy dx \\ &= 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\alpha+1} \left[ (1 - (x + y))^{\alpha+1} \right]_{y=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dx = 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\alpha+1} \left[ \left(\frac{1}{2} - x\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{2}{3} - x\right)^{\alpha+1} \right] dx \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ \left(\frac{1}{2} - x\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{2}{3} - x\right)^{\alpha+2} \right]_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ -\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} \right] \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right]. \end{aligned}$$

Teraz możemy policzyć  $\Phi(\alpha)$ :

$$\Phi(\alpha) = \frac{24}{\alpha+1} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{6}{\alpha+2} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right] \right].$$

Niestety nie możemy obliczyć algebraicznie, kiedy  $\Phi(\alpha) = 1$ , ale przybliżając rozwiązanie numeryczne otrzymujemy  $\alpha \approx 1.7826$



Rysunek 4: Losowy dywan Sierpińskiego

## 5.2 Wielowymiarowy losowy dywan Sierpińskiego

Zastanówmy się teraz nad analogiczną konstrukcją, tym razem zacznijmy od  $n$ -wymiarowego sześcianu (hipersześcianu) o krawędzi długości 1. Taki hipersześcian ma  $2^n$  wierzchołków. Wylosujemy niezależnie  $2^n$  liczb z rozkładu jednostajnego na przedziale  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  i przy każdym wierzchołku narysujemy hipersześcian o takiej długości. Następnie dorysujemy hipersześciany tak, aby każda krawędź zawierała się w brzegu jakiegoś hipersześcianu. Policzmy liczbę takich "mniejszych" hipersześcianów: mamy  $2^n$  wierzchołków, z każdego wychodzi  $n$  krawędzi, czyli łącznie liczba będzie równa  $\frac{n2^n}{2}$ , ponieważ każda krawędź należy do dwóch wierzchołków. Teraz możemy policzyć  $\Phi(\alpha)$  analogicznie do poprzedniego przykładu:

$$\Phi(\alpha) = 2^n \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 2^{n-1}n \mathbb{E}[T_2^\alpha],$$

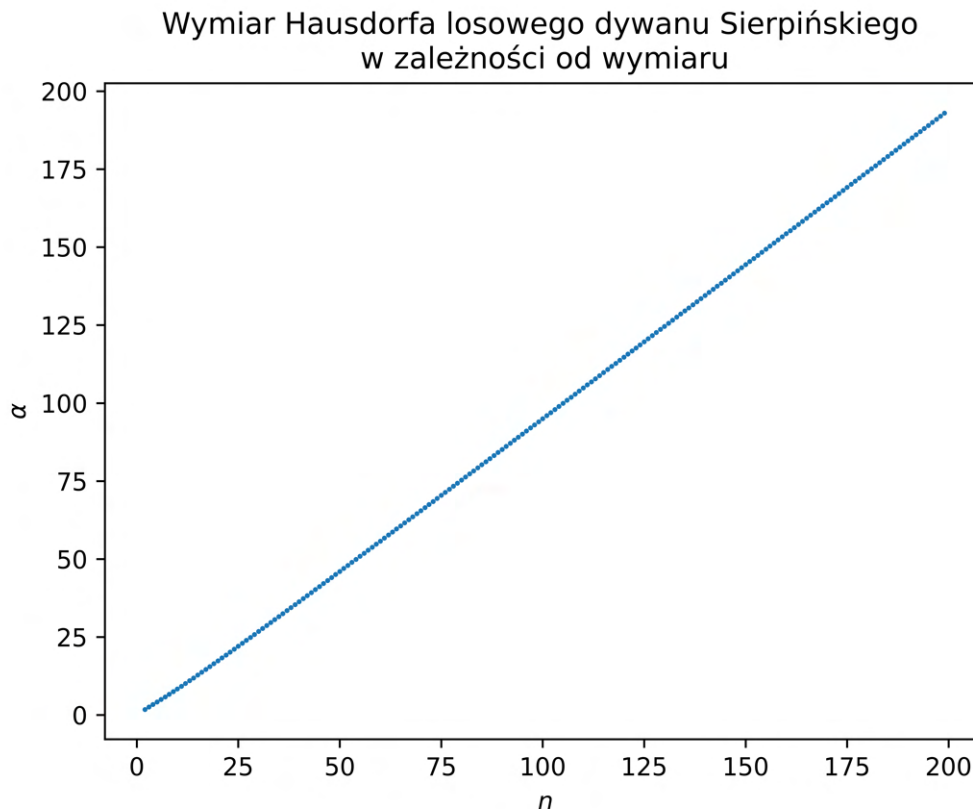
gdzie  $T_1$  to stosunek średnich hipersześcianów przy wierzchołkach, a  $T_2$  "małych" hipersześcianów. Czyli tak, jak poprzednio

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \frac{6}{\alpha + 1} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} \right],$$

$$\mathbb{E}[T_2^\alpha] = 36 \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right],$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{6 \cdot 2^n}{\alpha + 1} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{3 \cdot 2^n}{\alpha + 2} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right] \right].$$

Tutaj tym bardziej nie możemy znaleźć dokładnych wartości i musimy posilkować się przybliżeniami



Rysunek 5: Wymiar Hausdorffa losowego dywanu Sierpińskiego

Zastanawiająca jest liniowa zależność pomiędzy tymi wartościami. Spróbujmy ją udowodnić w przypadku deterministycznym dywanu Sierpińskiego. Tutaj z racji, że dzielimy na równe hipersześciany, to  $T_1^\alpha = T_2^\alpha = \frac{1}{3^\alpha}$ , mamy więc równanie

$$2^n \frac{1}{3^\alpha} + n 2^{n-1} \frac{1}{3^\alpha} = 1$$

$$2^{n-1}(2+n) = 3^\alpha$$

$$\log_3(2^{n-1}) + \log_3(2+n) = \alpha$$

$$\alpha = n \log_3(2) - \log_3(2) + \log_3(2+n).$$

Widzimy, że nie jest to zależność liniowa, ale licząc granice  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\alpha}{n} = \log_3(2)$  otrzymujemy, że jest to asymptotyczna liniowość.

### 5.3 Jednostajny kwadrat

Rozważmy teraz inny przykład tworzenia zbioru Cantora. Ustalmy liczbę  $p \in (0, 1)$ . Podzielmy nasz kwadrat na 9 równych części i każdą z nich niezależnie od innych wy-

tnijmy z prawdopodobieństwem  $1 - p$ . Następnie na każdym z pozostałych kwadratów powtórzmy tę operację dzielenia i usuwania. Zastanówmy się nad wymiarem Hausdorffa tego fraktala, ale najpierw zauważmy, że  $\mathbb{E}[T_1] = \dots = \mathbb{E}[T_9]$ , oraz że

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = p \frac{1}{3^\alpha},$$

dlatego

$$\Phi(\alpha) = 9p \frac{1}{3^\alpha}.$$

Stąd już możemy wyznaczyć dokładną wartość wymiaru Hausdorffa:

$$1 = 9p \frac{1}{3^\alpha}$$

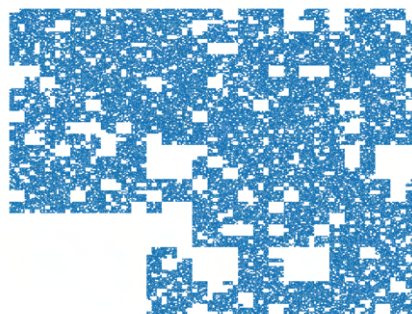
$$3^\alpha = 9p$$

$$\alpha = \log_3(9p) + 2.$$

Zauważmy, że tą konstrukcją możemy stworzyć zbiór o dowolnym wymiarze Hausdorffa. Może zastanawiać fakt, że dla wartości  $p$  bliskich zeru wartość  $\alpha$  byłaby ujemna, jednak zauważmy, że gdy  $p \leq \frac{1}{9}$ , to  $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^9 T_i^0] \leq 1$  co jest sprzeczne z założeniem 4.



(a) Wymiar 1.6



(b) Wymiar 1.9

Rysunek 6: Zbiory o różnych wymiarach Hausdorffa

## 5.4 Losowy dywan Sierpińskiego z losową liczbą kwadratów

Wróćmy teraz do przykładu 5.1, jednak dodajmy losową liczbę kwadratów: niech  $X$  to zmienna z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda = 2$ . Podczas każdego dzielenia kwadratu, gdy już jest podzielony na 8 części zostawmy 4 "duże" kwadraty przy rogach oraz  $(X)_4 + 1$  "małych" kwadratów, gdzie  $(\cdot)_4$  oznacza resztę z dzielenia przez 4. Pozostałe kwadraty usuńmy w taki sposób, by zostały kwadraty zaczynając od dolnego i idąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Zauważmy, że to, które z czterech małych kwadratów usuniemy, nie wpływa na wymiar Hausdorffa tego zbioru. Przy liczeniu  $\Phi(\alpha)$  musimy uwzględnić tę różną ilość kwadratów, pamiętając, że  $P(X = k) = \frac{e^{-2} 2^k}{k!}$ :

$$\Phi(\alpha) = 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^{\infty} P[X = 4j + i - 1] i \mathbb{E}[T_5^\alpha]$$

$$= \sum_{i=1}^4 i \mathbb{E}[T_5^\alpha] e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j+i-1}}{(4j+i-1)!}.$$

Gdzie  $T_1$  i  $T_5$  to oznaczenia z przykładu 5.1. Przyjrzyjmy się teraz wewnętrznej sumie. Do obliczenia tych sum potrzebne nam będą rozwinięcia w szeregi potęgowe funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots, \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, \\ \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \end{aligned}$$

Gdy  $i = 1$  nasza suma ma postać

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j}}{(4j)!} = 1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{12}}{12!} + \dots,$$

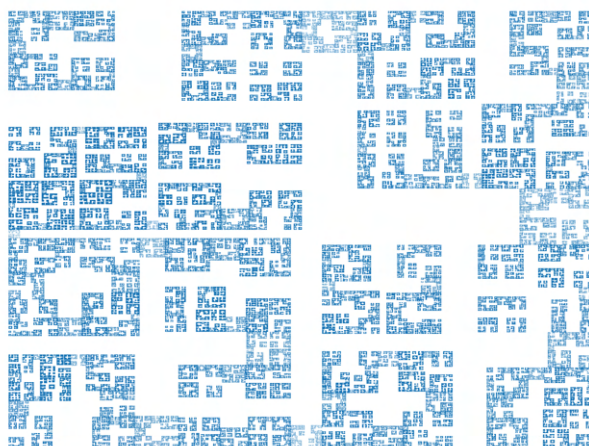
co korzystając z powyższych rozwinięć można zapisać jako  $\frac{1}{2}(\cos(2) + \cosh(2))$ . Gdy  $i = 2$  to

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j+1}}{(4j+1)!} = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots = \frac{1}{2}(\sin(2) + \sinh(2)).$$

Podobnie możemy policzyć dwie pozostałe sumy. Teraz możemy wrócić do obliczania wymiaru Hausdorffa:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + \frac{e^{-2}}{2} \mathbb{E}[T_5^\alpha] \left( (\cos(2) + \cosh(2)) + 2(\sin(2) + \sinh(2)) + \right. \\ &\quad \left. + 3(\cosh(2) - \cos(2)) + 4(\sinh(2) - \sin(2)) \right) \\ &= 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + e^{-2} \mathbb{E}[T_5^\alpha] \left( 2 \cosh(2) - \cos(2) + 3 \sinh(2) - \sin(2) \right). \end{aligned}$$

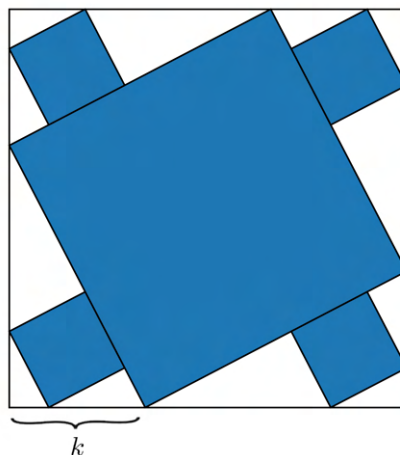
Tutaj też, by obliczyć rozwiązanie  $\Phi(\alpha) = 1$  musimy się zadowolić przybliżeniem numerycznym  $\alpha \approx 1.738307$ .



Rysunek 7: Losowy dywan Sierpińskiego z losową liczbą kwadratów

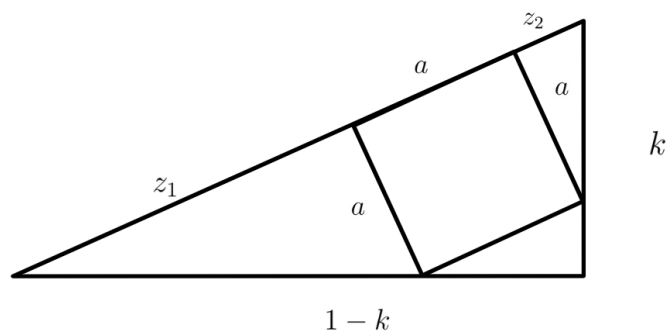
## 5.5 Losowo obracający się kwadrat

Znów zaczynamy od kwadratu  $J$  o długości 1, wylosujemy jedną liczbę  $k$  z rozkładu  $U[0, \frac{1}{2}]$ . Wpiszmy teraz w ten kwadrat inny kwadrat  $J_1$  tak, by odległość pomiędzy najbliższymi wierzchołkami obu kwadratów była równa  $k$ . Powstaną nam wtedy na rogach cztery trójkąty prostokątne, wpisujemy w nie kwadraty tak, by miały wspólny bok z przeciwprostokątną tego trójkąta dostając zbiory  $J_2, J_3, J_4, J_5$ . Operację tę powtarzamy dla wszystkich  $J_n$ .



Rysunek 8: Konstrukcja losowo obracającego się kwadratu

By móc policzyć wymiar Hausdorffa tego zbioru musimy policzyć długości boków większego i mniejszego kwadratu. Z twierdzenia pitagorasa długość większego jest równa  $\sqrt{2k^2 - 2k + 1}$ , by obliczyć długość mniejszego spójrzmy na rysunek



Rysunek 9: Dolny trójkąt losowo obracającego się kwadratu

Korzystając z podobieństwa trójkątów możemy napisać równania

$$\frac{z_1}{a} = \frac{1-k}{k}, \quad \frac{z_2}{a} = \frac{k}{1-k}.$$

Wtedy wraz z tym, że  $z_1 + z_2 + a = \sqrt{2k^2 - 2k + 1}$  dostajemy

$$a = \frac{\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1 + \frac{1-k}{k} + \frac{k}{1-k}}.$$

Policzmy teraz wartości oczekiwane zmiennych  $T_1^\alpha$  oraz  $T_2^\alpha$

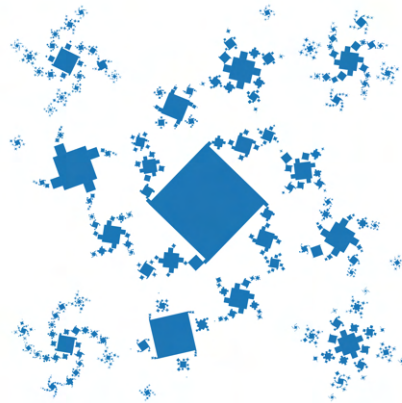
$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 2x + 1}^\alpha dx,$$

$$\mathbb{E}[T_2^\alpha] = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1 + \frac{1-k}{k} + \frac{k}{1-k}} \right)^\alpha dx.$$

Dodatkowo zauważmy, że  $\mathbb{E}[T_2^\alpha] = \mathbb{E}[T_3^\alpha] = \mathbb{E}[T_4^\alpha] = \mathbb{E}[T_5^\alpha]$ . Niestety nie możemy policzyć tych całek, dlatego możemy jedynie przybliżyć rozwiązanie równania

$$\Phi(\alpha) = \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 4 \mathbb{E}[T_2^\alpha] = 1.$$

Dostając, że przybliżona wartość wymiaru Hausdorffa jest równa 1.520099.



Rysunek 10: Losowo obracający się kwadrat

## Literatura

- [1] G. Alsmeyer *Random Recursive Equations and Their Distributional Fixed Points*
- [2] R. Daniel Mauldin and S. C. Williams *Random Recursive Constructions: Asymptotic Geometric and Topological Properties*