Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny

Dominik Gdesz

Przestrzeń wielomianów właściwych

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. Tadeusza Januszkiewicza

Streszczenie:

Odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ nazywamy właściwym, jeśli przeciwobraz dowolnego zbioru zwartego jest zwarty. Kiedy X i Y są lokalnie zwarte, to odwzorowania właściwe naturalnie przedłużają się do odwzorowań pomiędzy uzwarceniami Aleksandrowa X i Y. W rezultacie rzeczywiste wielomiany właściwe są dwojako związane z geometrią: z jednej strony same dostarczają prosto opisanych przykładów odwzorowań między sferami, z drugiej można je badać przy użyciu geometrycznych narzędzi. W niniejszej pracy zostały pokazane podstawowe własności właściwych odwzorowań wielomianowych, częściowe rezultaty dotyczące właściwości przestrzeni wielomianowych odwzorowań $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, wyliczony został typ homotopii przestrzeni rzeczywistych wielomianów właściwych ustalonego stopnia i liczby zmiennych, a także przedstawiona została metoda wyliczania stopnia odwzorowania $S^2 \to S^2$ będącego przedłużeniem właściwego odwzorowania $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Wstęp

Jeśli P jest niestałym wielomianem rzeczywistym jednej zmiennej, to jest on właściwy, czyli spełnia następujący warunek:

$$|x_n| \to \infty \implies |P(x_n)| \to \infty.$$

Powyższe stwierdzenie nie jest jednak prawdziwe dla wielomianów wielu zmiennych, o czym łatwo się można przekonać rozważając wielomian:

$$P(x, y) = x.$$

W naturalny sposób pojawia się pytanie o to, które z wielomianów wielu zmiennych są właściwe. W literaturze można spotkać rezultaty dotyczące bardzo podobnego, ale nieco silniejszego warunku koersywności. [BS19] Jest ona interesująca z punktu widzenia teorii optymalizacji ponieważ gwarantuje ona istnienie minimum globalnego. Niniejsza praca traktuje właściwość z nieco innej strony, mianowicie korzysta z tego, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest właściwa, to można ją przedłużyć do odwzorowania:

$$\overline{f} : S^n \to S,$$

gdzie każdą ze sfer traktujemy jako uzwarcenie Aleksandrowa odpowiedniej przestrzeni rzeczywistej. Podobna obserwacja dotyczy nie tylko wielomianów wielu zmiennych, ale także dowolnych odwzorowań właściwych $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Z jednej strony pozwala to tworzyć przykłady różnych odwzorowań pomiędzy sferami przy użyciu wielomianów właściwych, z drugiej strony - badać wielomiany właściwe przy użyciu narzędzi topologii algebraicznej i różniczkowej, w szczególności - stopnia odwzorowania. Celem niniejszej pracy jest zbadanie przestrzeni wielomianów właściwych z geometrycznej perspektywy.

Przestrzenie wielomianów czy funkcji wymiernych jako podprzestrzeni odwzorowań ciągłch stanowi rozległy obszar badań, którym praca Graema Segala [Seg79] dała mocny impuls. Przestrzeni wielomianów właściwych do tej pory jednak nie badano na większą skalę.

W rozdziale 1 zdefiniowana są najważniejsze pojęcia niniejszej pracy - właściwość odwzorowania (por. definicja 1.1) oraz uzwarcenie Aleksandrowa przestrzeni lokalnie zwartej (por. definicja 1.3). Na dwa sposoby uściślone jest pojęcie przestrzeni wielomianów właściwych (por. definicje 1.6 i 1.7). Wprowadzone są dwa narzędzia istotne dla niniejszej pracy - stopień odwzorowania (por. definicja 1.10) i teoria uporządkowanych ciał rzeczywiście domkniętych (por. definicja 1.14).

W rozdziale 2 pokazane są ogólne własności wielomianowych odwzorowań właściwych, które nie zależą od wymiaru dziedziny ani przeciwdziedziny. Zdefiniowane jest pojęcie części głównej odwzorowania wielomianowego (por. definicja 2.4) i pokazany jest jej związek z właściwością odwzorowania (por. lemat 2.6). W dalszej części tego rozdziału wprowadzone jest pojęcie homotopii właściwej (por. definicja 2.9) a także rozstrzygnięcie problemu właściwości wielomianów zespolonych (por. twierdzenie 2.22).

W rozdziale 3 badane są wielomiany rzeczywiste wielu zmiennych. Wprowadzone zostają kryteria niewłaściwości takich wielomianów (por. lemat 3.3 i lemat 3.4), a następnie zdefiniowane i rozstrzygnięte jest zagadnienie trwałej właściwości wielomianów rzeczywistych (por. uwaga 3.7, lemat 3.8 i lemat 3.10). Pod koniec rozdziału pokazane jest kilka własności zbiorów wielomianów właściwych z topologią pochodzącą od przestrzeni współczynników, w tym ich typ homotopii (por. 3.18).

W rozdziale 4 badane są pary wielomianów rzeczywistych dwóch zmiennych. Pokazany jest ich alternatywny opis poprzez wielomiany zespolone zmiennych $z, \overline{z}$. Najważniejszym twierdzeniem tej części pracy jest twierdzenie 4.9 pokazujące, że żaden wielomian zespolony zmiennych $z, \overline{z}$ stopnia większego niż 1 nie jest trwale niewłaściwy.

W rozdziale 5 jest zaprezentowana metoda obliczania topologicznego stopnia przedłużenia właściwego wielomianu zmiennych $z, \overline{z}$ do odwzorowania $S^2 \to S^2$ (por. twierdzenie 5.3). Dzięki temu pokazane jest oszacowanie stopnia topologicznego przedłużenia wielomianu zmiennych $z, \overline{z}$ z góry przez jego stopień algebraiczny (por. wniosek 5.4).

Spis treści

1 Pojęcia

1.1 Odwzorowania właściwe

Wprowadzimy teraz zasadnicze pojęcie niniejszej pracy:

Definicja 1.1. Niech $(X, T_X), (Y, T_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. O odwzorowaniu $f : X \to Y$ mówimy, że jest **właściwe**, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset Y$ zbiór $f^{-1}(K)$ również jest zwarty.

W interesujących nas przypadkach powyższą definicję można wyrazić w nieco bardziej namacalny sposób:

Uwaga 1.2. Niech X, Y będą skończeniewymiarowymi przestrzeniami unormowanymi. Wówczas odwzorowanie $f : X \to Y$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $x_n \in X$ jest spełniony następujący warunek:

$$||x_n|| \to \infty \implies ||f(x_n)|| \to \infty.$$

Z powyższego warunku wynika, że odwzorowania właściwe można przedłużyć na jednopunktowe uzwarcenie, którego definicję przytaczamy poniżej.

Definicja 1.3. Uzwarceniem Aleksandrowa lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej (X, T) nazywamy przestrzeń:

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

z topologią:

$$\hat{T} = T \cup \{U \subseteq \hat{X} : X \setminus U \text{ jest zwarty}, \infty \in U\}.$$

Uwaga 1.4. Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ można przedłużyć do odwzorowania pomiędzy odpowiednimi uzwarceniami Aleksandrowa spełniającego $f(\infty) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest właściwe. Takie przedłużenie jest jednoznaczne.

W interesujących nas przypadkach uzwarcenie Aleksandrowa ma wyjątkowo prosty opis:

Fakt 1.5. Uzwarceniem Aleksandrowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest sfera S^n.

1.2 Przestrzenie wielomianów właściwych

Obiektem badań niniejszej pracy są zbiory wielomianów właściwych. Opiszemy teraz dwa naturalne sposoby nadania tym zbiorom struktury topologicznej. Z jednej strony zbiorowi wielomianów można nadać strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem współczynników (analogicznie można postąpić dla zbioru krotek wielomianów), a następnie stamtąd dziedziczyć topologię dla podzbiorów wielomianów właściwych (i niewłaściwych). Jest to motywacja dla poniższych oznaczeń:

Definicja 1.6. Przez $\mathcal{P}_{m.n}$ rozumiemy przestrzeń rzeczywistych wielomianów właściwych m zmiennych stopnia dokładnie n z topologią odziedziczoną ze struktury przestrzeni liniowej zadanej na przestrzeni wielomianów m zmiennych nad $\mathbb{R}$. Podobnie przez $\mathcal{N}_{m.n}$ rozumiemy przestrzeń rzeczywistych wielomianów niewłaściwych m zmiennych stopnia n z analogicznie odziedziczoną topologią.

Oznaczenia te będą użyteczne w rozdziale 3, kiedy będziemy badać rzeczywiste wielomiany właściwe wielu zmiennych.

Ponieważ zgodnie z uwagą 1.4 odwzorowanie właściwe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ przedłuża się jednoznacznie do odwzorowania $\hat{f} : S^n \to S^m$, to po określeniu metryki możemy zadać na odwzorowaniach wielomianowych topologię na drugi sposób - poprzez topologię zbieżności jednostajnej. Tę obserwację można również wysłowić w bardziej ogólny, niezależny od metryki sposób przy pomocy topologi zwarto-otwartej.

Definicja 1.7. Przez $(U_{m,k,n}, T)$ rozumiemy zbiór przedłużeń właściwych odwzorowań wielomianowych $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia n wraz z topologią odziedziczoną z przestrzeni funkcji $S^m \to S^k$ z topologią zwarto-otwartą. Przypomnijmy, że topologia zwarto-otwarta na przestrzeni funkcji $X \to Y$ jest zadana poprzez bazę zbiorów: $\bigcap_{i=1}^{l} P(C_i, U_i)$, gdzie C_i są zwarte,
U_i - otwarte, oraz:

$$P(A, B) = \{f : X \to Y, f(A) \subset B\}.$$

Fakt 1.8. Jeśli X jest przestrzenią zwartą, a Y – przestrzenią metryczną, to topologia zwarto-otwarta pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej.

Fakt 1.9. Jeśli przedłużenia wielomianów P_n zbiegają do przedłużenia P w topologii zwarto-otwartej na uzwarceniu Aleksandrowa dziedziny, to P_n zbiega do P według współczynników.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że P_n nie zbiega do P według współczynników. Wówczas P_n nie zbiegają punktowo na dziedzinie, więc tym bardziej nie mogą zbiegać jednostajnie dla jakiejkolwiek metryki na uzwarceniu Aleksandrowa dziedziny. □

W dalszej części pracy przekonamy się, że zdefiniowane powyżej topologie na zbiorach wielomianów właściwych nie muszą się pokrywać (por. wniosek 2.19).

1.3 Stopień odwzorowania

Skoro uzwarcenie Aleksandrowa prowadzi do badania odwzorowań właściwych jako odwzorowań między sferami odpowiednich wymiarów, to naturalne staje się poszukiwanie homotopijnych niezmienników takich odwzorowań. W przypadku funkcji $S^m \to S^m$ takim niezmiennikiem jest stopień odwzorowania.

Definicja 1.10. Niech M^m, N^m będą orientowalnymi rozmaitościami, a f – ciągłym odwzorowaniem między nimi. **Stopniem odwzorowania** f nazywamy odwzorowanie zadawane przez f w m-tych homologiach (nad $\mathbb{Z}$):

$$f_* : H_m(M^m) \to H_m(N^m).$$

Ponieważ m-te homologie rozmaitości m-wymiarowej są izomorficzne z $\mathbb{Z}$, to po wybraniu generatora g_1 grupy $H_m(M^m)$ oraz generatora g_2 grupy $H_m(N^m)$ stopień można wyrazić jako liczbę całkowitą, którą oznaczamy poprzez:

$$\deg f = k \text{ gdzie } f_*(g_1) = kg_2$$

.

Fakt 1.11. Dla rozmaitości M^m wybranie generatora $H_n(M^m)$ jest równoznaczne z ustaleniem jej orientacji.

Okazuje się, że dla funkcji gładkich stopień odwzorowania można liczyć również w inny, bardzo wygodny sposób. W tym celu wprowadzimy następujące pojęcie:

Definicja 1.12. Niech M, N będą gładkimi rozmaitościami. **Wartością regularną** odwzorowania $f : M \to N$ nazywamy punkt $y \in N$ taki, że:

$$f(x) = y \implies df_x \text{ jest maksymalnego rzędu.}$$

Związek wartości regularnych ze stopniem odwzorowania ilustruje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1.13. *Jeśli M^m, N^m są zorientowanymi rozmaitościami, a $f : M^m \to N^m$ jest funkcją gładką, to dla dowolnej wartości regularnej y zachodzi następujący wzór [Hat00, Prop. 2.30, str. 136]:*

$$\deg f = \sum_{x: f(x)=y} \operatorname{sgn}(\det df_x)$$

1.4 Teoria uporządkowanych ciał rzeczywiście domkniętych

Naturalnym językiem dla badania własności wielomianów rzeczywistych jest język ciał uporządkowanych. Pozwala on wprowadzić teorię uporządkowanych ciał rzeczywiście domkniętych.

Definicja 1.14. Teorią uporządkowanych ciał rzeczywiście domkniętych (RCF) nazywamy teorię nad językiem składającym się ze stałych $0, 1$, binarnej relacji $<$ i binarnych symboli funkcyjnych $+, \cdot$ zawierającą aksjomaty:

- teorii porządków liniowych:

$$(\forall x)\neg(x < x),$$
$$(\forall x)(\forall y)\neg(x < y \wedge y < x),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \implies x < z),$$
$$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee y < x \vee x = y),$$

- teorii ciał:

$$(\forall x)(x + 0 = x),$$
$$(\forall x)(\exists y)(x + y = 0),$$
$$(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z)),$$
$$(\forall x)(x \cdot 1 = x),$$
$$(\forall x)(\exists y)(x = 0 \vee x \cdot y = 1),$$
$$(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)),$$
$$0 \neq 1,$$

- dodatkowe aksjomaty teorii ciał uporządkowanych:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \implies x + z < y + z),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z),$$

- dla każdego n dodatkowy aksjomat postaci:

$$(\forall x_0)(\forall x_1)...(\forall x_n)(\forall z)(\forall w)[(x_n z^n + ... x_1 z + x_0) \cdot (x_n w^n + ... x_1 w + x_0) < 0 \implies$$

$$(\exists y)((z < y < w \vee w < y < z) \wedge x_n y^n + ... x_1 y + x_0 = 0)].$$

Uwaga 1.15. Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych spełnia RCF.

Definicja 1.16. Mówimy, że teoria $\mathcal{T}$ nad językiem $\mathcal{L}$ ma własność **eliminacji kwantyfikatorów** gdy dla dowolnej formuły $\phi(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{L}$ istnieje formuła $\psi(x_1, ..., x_n)$ taka, że:

$$\mathcal{T} \vdash \phi \iff \psi.$$

Twierdzenie 1.17. *RCF ma własność eliminacji kwantyfikatorów.*

Dowód. Dowód można znaleźć w [Mar02, Tw. 3.3.15, str. 97]. □

2 Ogólne własności

W tym rozdziale pokażemy kilka własności wielomianowych odwzorowań, które nie zależą od wymiaru dziedziny i przeciwdziedziny. Przez P będziemy oznaczać wielomianowe odwzorowanie $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia n, a mówiąc o mnożeniu krotek wielomianów tej samej długości mamy na myśli krotkę iloczynów. Na początek zauważmy następujący fakt:

Lemat 2.1. *P jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $||P||^2$ jest właściwe.*

Dowód. Wprost z definicji właściwości. □

Uwaga 2.2. $||P||^2$ możemy potraktować jako wielomian rzeczywisty wielu zmiennych.

2.1 Część główna

Lemat 2.3. *Jeśli wielomianowe odwzorowanie H jest jednorodne, to jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy nie przyjmuje 0 na sferze jednostkowej.*

Dowód. Niech n oznacza stopień H. Jeśli dla pewnego $v : ||v|| = 1$ zachodzi $H(v) = 0$, to dla całej prostej kv zachodzi $H(kv) = 0$ (gdzie k jest odpowiednio rzeczywistym lub zespolonym skalarem). Przeczy to właściwości H. Odwrotnie, jeśli $H(v) \neq 0$ dla wszystkich $v : ||v|| = 1$, to ze zwartości sfery jednostkowej oraz ciągłości $||H(v)||$ istnieje c takie, że:

$$||H(v)|| > c \text{ dla każdego } v : ||v|| = 1.$$

Z multiplikatywności normy i jednorodności H wynika więc, że dla dowolnego v zachodzi:

$$||H(v)|| > c||v||^n,$$

a stąd H jest właściwy. □

Definicja 2.4. Częścią główną P nazywamy takie jednorodne wielomianowe odwzorowanie H stopnia n, że $P - H$ jest stopnia maksymalnie $n - 1$.

Uwaga 2.5. Dla ustalonego wielomianu P istnieje dokładnie jeden wielomian spełniający powyższą definicję.

Lemat 2.6. *Jeśli część główna P jest właściwa, to P również jest właściwy.*

Dowód. Załóżmy, że H- część główna P - jest właściwe. Niech $c \in \mathbb{R}$ będzie takie, że:

$$||H(v)|| > c \text{ dla } v : ||v|| = 1.$$

Z dowodu lematu 2.3 wiemy, że dla dowolnego v zachodzi:

$$||H(v)||^2 > c^2||v||^{2n}.$$

Teraz zgodnie z uwagą 2.1 aby zbadać właściwość P wystarczy pokazać właściwość $||P||^2$. Zauważmy, że jego część główna jest równa $||H||^2$, czyli wielomian $||P||^2 - ||H||^2$ ma stopień co najwyżej $2n-1$. Niech teraz d oznacza liczbę niezerowych współczynników $||P||^2 - ||H||^2$, a C - maksimum ich modułów. Wówczas:

$$||P(x_1,...,x_m)||^2 - ||H(x_1,...,x_m)||^2 < dC \cdot \max_{i=1,...,m}\{|x_i|^{2n-1}\} < dC||(x_1,...,x_n)||^{2n-1}.$$

W takim razie dla v takiego, że $||v|| > \frac{2dC}{c^2}$ można oszacować $||P(v)||^2$ poprzez:

$$||H(v)||^2 + ||P(v)||^2 - ||H(v)||^2 > c^2\frac{2dC}{c^2}||v||^{2n-1} - dC||v||^{2n-1} = dC||v||^{2n-1}.$$

Wynika stąd, że $||P||^2$ jest właściwe, a w takim razie P również. □

Wniosek 2.7. *Każdy niestały wielomian rzeczywisty jednej zmiennej jest właściwy.*

2.2 Homotopie właściwe

Ponieważ $\mathbb{R}^m$ jest ściągalne dla każdego m, to wszystkie odwzorowania $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ są homotopijne z odwzorowaniem stałym. Taka homotopia wśród odwzorowań właściwych nie musi prowadzić jednak do homotopii pomiędzy ich przedłużeniami do odwzorowań $S^m \to S^k$.

Przykład 2.8. Homotopia:

$$F(x,t) = tx^2 + x$$

zadaje homotopię pomiędzy wielomianami $x^2 + x$ i x która dla po ustaleniu dowolnego $t \in [0,1]$ daje odwzorowanie właściwe. Pomimo tego przedłużenia odwzorowań $x^2 + x$ i x nie są homotopijne. Istotnie, przedłużenie x zadaje odwzorowanie $S^1 \to S^1$ które działa nietrywialnie na $H_1(S^1)$, a przedłużenie odwzorowania $x^2 + x$ zadaje odwzorowanie $S^1 \to S^1$, które nie jest surjektywne (więc na $H_1(S^1)$ działa trywialnie).

Powyższy fakt stanowi motywację dla następującej definicji:

Definicja 2.9. Homotopię pomiędzy właściwymi odwzorowaniami $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lub $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$ nazywamy właściwą, jeśli zadaje ona homotopię pomiędzy ich przedłużeniami do odwzorowań $S^m \to S^k$.

Uwaga 2.10. Aby sprawdzić właściwość homotopii wystarczy sprawdzić ciągłość jej przedłużenia w punkcie ∞, mianowicie zbadać, czy dla dowolnych ciągów v_i, t_i zachodzi:

$$||v_i|| \to \infty \implies ||F(v_i, t_i)|| \to \infty.$$

Lemat 2.11. *Jeśli homotopia F pomiędzy właściwymi odwzorowaniami $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest właściwa, to przedłużenia odwzorowań $f_i(v) = F(v, \frac{1}{i})$ zbiegają do przedłużenia odwzorowania $f(v) = F(v, 0)$ w topologii zwarto-otwartej.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że jest inaczej i ustalmy dowolną metrykę na S^m. Ponieważ przedłużenia f_i nie zbiegają do przedłużenia odwzorowania f w topologii zwarto-otwartej, to zgodnie z faktem 1.8 nie zbiegają też jednostajnie. W takim razie dla pewnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg punktów x_i taki, że:

$$d(f_i(x_i), f(x_i)) > \varepsilon.$$

Ze zwartości S^n wynika, że istnieje podciąg x_{i_k} zbieżny do pewnego punktu x. Z ciągłości f wynika, że dla prawie wszystkich $i_k : k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$d(f(x), f(x_{i_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

W takim razie jednak dla prawie wszystkich $i_k : k \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość:

$$d(f_{i_k}(x_{i_k}), f(x)) > \frac{1}{2}\varepsilon,$$

a to przeczy ciągłości F przedłużonej do homotopii między odwzorowaniami właściwymi. □

Lemat 2.12. *Niech P będzie wielomianowym odwzorowaniem $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, a H – jego częścią główną. Jeśli H jest właściwe, to P jest właściwie homotopijny z H.*

Dowód. Z dowodu lematu 2.6 można wywnioskować, że poza pewnym dyskiem D zachodzi:

$$||P - H||^2 < \frac{1}{4}||H||^2.$$

Dla $v \notin D$ zachodzi zatem $P(v) \in B(H(v), \frac{1}{2}||H(v)||)$. W takim razie:

$$[P(v), H(v)] \subset B(H(v), \frac{1}{2}||H(v)||) \text{ dla } v \notin D.$$

Rozważmy zatem następującą homotopię:

$$F(v,t) = tP(v) + (1-t)H(v).$$

Wówczas dla $v \notin D$ i dowolnego t zachodzi:

$$F(v,t) \in [P(v), H(v)].$$

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami prawdziwe jest szacowanie:

$$||F(v,t)|| > \frac{1}{2}||H(v)||,$$

a zatem zgodnie z uwagą 2.10 homotopia F jest właściwa. □

Twierdzenie 2.13. *Niech γ będzie ciągłym odwzorowaniem z $[0,1]$ w przestrzeń wielomianowych odwzorowań właściwych stopnia n z topologią odziedziczoną ze struktury liniowej na przestrzeni odwzorowań wielomianowych. Jeśli dla każdego $t \in [0,1]$ część główna $\gamma(t)$ jest właściwa i stopnia n, to $F(x,t) = \gamma(t)(x)$ jest właściwą homotopią pomiędzy odwzorowaniami wielomianowymi $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$.*

Zanim udowodnimy twierdzenie 2.13 pokażemy dodatkowy, techniczny lemat:

Lemat 2.14. *Niech P_i, P będą wielomianowymi odwzorowaniami $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia n o właściwych częściach głównych takimi, że $P_i \to P$ według współczynników. Wówczas istnieją takie r, N, że zachodzi:*

$$||v|| > r, i > N \implies ||P_i(v) - P(v)|| < \frac{1}{2}||H(v)||,$$

gdzie H jest częścią główną P.

Dowód. Niech:

$$c = \min\{|H(v)|| : ||v|| = 1\}.$$

Wówczas:

$$||H(v)|| \geqslant c||v||^n.$$

Niech d oznacza wymiar przestrzeni wielomianowych odwzorowań $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia co najwyżej n. Skoro P_i zbiega do P według współczynników, to dla pewnego N zachodzi:

$$\max\{a : a \text{ jest współczynnikiem } P - P_i\} < \frac{c}{2d}.$$

W takim razie dla $i > N$ i $v = (x_1, ..., x_m)$ prawdziwe jest następujące szacowanie:

$$||P_i(v) - P(v)|| < d\frac{c}{4d} \max_{i=1,...,m} |x_i|^n \leqslant \frac{c}{4}||v||^n.$$

Z drugiej strony $H - P$ jest odwzorowaniem wielomianowym stopnia $n-1$, a to znaczy że dla pewnego r zachodzi:

$$||v|| > r \implies ||H(v) - P(v)|| < \frac{c}{4}||v||^n.$$

W takim razie dla wyżej zdefiniowanych r, N oraz $||v|| > r, i > N$ otrzymujemy:

$$||H(v) - P_i(v)|| \leqslant ||H(v) - P(v)|| + ||(P(v) - P_i(v)|| < \frac{c}{4}||v||^n + \frac{c}{4}||v||^n < \frac{1}{2}||H(v)||.$$

□

Dowód twierdzenia 2.13. Rozważmy dowolne ciągi v_i, t_i zbiegające odpowiednio do v, t. Chcemy pokazać, że $\gamma(t_i)(v_i) \to \gamma(t)(v)$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Wówczas z ciągłości $\gamma(t)$ wynika, że dla pewnego N_1 zachodzi:

$$i > N_1 \implies ||\gamma(t)(v_i) - \gamma(t)(v)|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ $v_i \to v$, to ciąg v_i mieści się w pewnej kuli $B(0, r)$. Na takiej kuli zbieżność według współczynników pociąga zbieżność jednostajną, dlatego istnieje N_2 takie, że:

$$i > N_2 \implies ||\gamma(t_i)(v_i) - \gamma(t)(v_i)|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

W takim razie dla $i > \max\{N_1, N_2\}$ zachodzi:

$$||\gamma(t_i)(v_i) - \gamma(t)(v)|| < \varepsilon,$$

dowodzi ciągłości homotopii zadawanej przez γ w punkcie v, t. Zostaje pokazać, że jest to homotopia właściwa, a to zgodnie z uwagą 2.10 sprowadza się do pokazania, że jej przedłużenie jest ciągłe w ∞. Rozważmy zatem ciąg $t_i \to t$

oraz ciąg $v \to \infty$. Z lematu 2.14 wynika, że istnieje r takie, że dla pewnego N_1 zachodzi:

$$||x|| > r, i > N_1 \implies ||\gamma(t_i)(x) - \gamma(t)(x)|| < \frac{1}{2}||H(x)||,$$

gdzie H jest częścią główną $\gamma(t)$. Niech N_2 będzie takie, że:

$$i > N_1 \implies ||v|| > r.$$

W takim razie dla $i > \max\{N_1, N_2\}$ dostajemy oszacowanie:

$$||\gamma(t_i)(v_i)|| > \frac{1}{2}||H(v_i)||.$$

Skoro H jest właściwe i $v_i \to \infty$, to:

$$||\gamma(t_i)(v_i)|| \to \infty,$$

co dowodzi właściwości homotopii zadanej przez γ. □

Wniosek 2.15. *Naturalne odwzorowanie z przestrzeni wielomianowych odwzorowań właściwych $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia n z topologią odziedziczoną ze struktury liniowej w $U_{m,n,k}$ po ograniczeniu do wielomianów o właściwej części głównej jest ciągłe.*

Dowód. Rozważmy ciąg wielomianowych odwzorowań $P_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stopnia n zbieżnych do P o tej własności, że części główne wszystkich P_i oraz P są właściwe. Wówczas możemy połączyć je krzywą γ o tej własności, że:

$$\gamma(\frac{1}{i}) = P_i, \gamma(0) = P.$$

Zgodnie z twierdzeniem 2.13 γ zadaje właściwą homotopię między $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$, a w takim razie z uwagi 2.10 wynika teza. □

Na koniec tego podrozdziału pokażemy zastosowanie stopnia w badaniu przestrzeni wielomianów właściwych::

Fakt 2.16. Jeśli $f, g : S^m \to S^m$ są odwzorowaniami o różnym stopniu, to nie są homotopijne, zatem są w różnych składowych spójnych przestrzeni odwzorowań $S^m \to S^m$ z topologią zwarto-otwartą.

Wniosek 2.17. *Jeśli przedłużenia właściwych odwzorowań wielomianowych $P, Q : R^m \to R^m$ stopnia n mają różny stopień topologiczny, to P i Q są w różnych składowych spójnych przestrzeni $U_{m,m,n}$.*

Przykład 2.18. Odwzorowania $P_i(x,y) = (x^2+y+\frac{1}{i}y^2, xy)$ są właściwe i zbiegają do właściwego $P(x,y) = (x^2+y, xy)$ w topologii dziedziczonej z przestrzeni współczynników, ale nie zbiegają do P w topologii zwarto-otwartej. Istotnie, dla każdego $i \in \mathbb{N}$ wielomian P_i ma właściwą część główną, a przez to jest z nią właściwie homotopijny. Ponieważ wielomian $x^2 + \frac{1}{i}y^2$ nie jest surjektywny, to stopień P_i dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ wynosi 0. Z drugiej strony możemy zauważyć, że:

$$|x| < 1 \vee |y| < 1 \implies |x^2 + y| \geqslant \max\{|x|, |y|\} - 1,$$
$$|x|, |y| > 1 \implies |xy| > \max\{|x|, |y|\}.$$

To dowodzi właściwości P. Wreszcie:

$$P^{-1}((1,0)) = \{(-1,0), (1,0), (0,1)\}.$$

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że $(1,0)$ jest wartością regularną P, a w takim razie stopień P jest nieparzysty. To dowodzi, że P_i nie zbiegają do P w topologii zwarto-otwartej.

Powyższy przykład jest ważny, ponieważ prowadzi do następującego wniosku:

Wniosek 2.19. *Topologia dziedziczona z przestrzeni współczynników na zbiorze wielomianowych odwzorowań $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stopnia 2 jest różna od topologii zwarto-otwartej.*

2.3 Wielomiany zespolone

Twierdzenie 2.20. *Każdy niestały wielomian zespolony $P(z)$ jest właściwy.*

Dowód. Analogicznie do dowodu lematu 2.6 możemy zauważyć, że P jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy jego część główna jest właściwa. Ponieważ jednak dla dowolnego $n > 0$ wielomian z^n jest właściwy, to teza twierdzenia jest prawdziwa. □

Twierdzenie 2.21. *Każdy niestały wielomian zespolony jest właściwie homotopijny ze swoją częścią główną.*

Dowód. Analogicznie do dowodu twierdzenia 2.13. □

Twierdzenie 2.22. *Każdy wielomian zespolony m zmiennych dla $m > 1$ jest niewłaściwy.*

Dowód. Wystarczy dowieść tezę dla wielomianu dwóch zmiennych z, w. Rozważmy wielomian $P(z,w)$ oraz jedyny wielomian jednorodny $H(z,w,t)$ taki, że $H(z,w,1) = P(z,w)$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian $Q_1(z) = H(z,1,0)$ posiada pierwiastki (których jest skończenie wiele). Niech z_0 będzie takim pierwiastkiem. Z drugiej strony wielomian:

$$Q_1(z,t) = H(z,1,t)$$

nie może posiadać izolowanego pierwiastka. Wynika stąd, że dla pewnych ciągów $z_i, t_i : i \in \mathbb{N}$ takich, że $z_i \to z_0, t_i \to 0, t_i \neq 0$ zachodzi:

$$H(z_i, 1, t_i) = 0 \text{ dla } i \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ H jest jednorodny, to również:

$$P(\frac{z_i}{t_i}, \frac{1}{t_i}) = H(\frac{z_i}{t_i}, \frac{1}{t_i}, 1) = 0.$$

Skoro $t_i \to 0$, to $||\frac{1}{t_i}|| \to \infty$, co dowodzi niewłaściwości P. □

3 Wielomiany $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Wiemy już, że jeśli część główna wielomianu jest właściwa, to sam wielomian również taki jest. Okazuje się, że odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe, co ilustruje poniższy przykład:

Przykład 3.1. Wielomian $x^4 + y^2$ jest właściwy, chociaż jego część główna jest niewłaściwa.

Mając powyższy przykład w pamięci możemy spróbować zbadać przestrzenie $\mathcal{P}_{m,n}$ i $\mathcal{N}_{m,n}$. Na początu rozważmy przypadek $m = 1$.

Twierdzenie 3.2. *Każdy niestały wielomian $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest właściwy. Odwzorowanie $S^1 \to S^1$ zadawane przez taki wielomian ma stopień topologiczny 0 lub ± 1 w zależności od stopnia algebraicznego P modulo 2, znaku przy części głównej P i wybranej orientacji S^1.*

Dowód. Skoro zgodnie z lematem 2.12 P jest homotopijny ze swoją częścią główną (jako odwzorowanie właściwe), to zadaje odwzorowanie o takim samym stopniu co ona. Część główna wielomianu rzeczywistego jednej zmiennej jest postaci cx^n. Dla n parzystego takie odwzorowanie nie jest surjektywne i wobec tego ma stopień 0. Dla n nieparzystego przeciwobraz wartości regularnej 1 jest jednoelementowy, przez co stopień zadawanego odwzorowanie wynosi ± 1. Zmiana znaku przy c lub orientacji S^1 skutkuje mnożeniem stopnia odwzorowania przez -1 zgodnie z twierdzeniem 1.13. □

3.1 Warunki właściwości wielomianów

Od tego miejsca do końca rozdziału przyjmujemy $m > 1$.

Lemat 3.3. *Wielomian $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest niewłaściwy wtedy i tylko wtedy, gdy posiada niezwartą poziomicę.*

Dowód. Jeśli wielomian posiada niezwartą poziomicę to wprost z definicji jest niewłaściwy. Odwrotnie, rozważmy niewłaściwy wielomian $N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Jeśli N jest stały, to teza zachodzi bezpośrednio. W przeciwnym razie N posiada niestałą część główną, która nie zeruje się w pewnym punkcie v sfery jednostkowej. Oznacza to, że wielomian $P(t) = N(tv)$ jest niestałym wielomianem, skąd bez straty ogólności możemy założyć, że dla $t \to \infty$ zachodzi $N(tv) \to \infty$ (w razie potrzeby rozważając $-N$ zamiast N). Z drugiej strony, skoro N jest niewłaściwy, to istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ oraz ciąg punktów x_i taki, że $||x_i|| \to \infty, N(x_i) < c$. Niech teraz $y_i = iv$. Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ definiujemy $\gamma_i(t) : t \in [0,1]$ jako dowolną drogę łączącą x_i oraz y_i o takiej własności, że dla każdego $t \in [0,1]$:

$$||\gamma_i(t)|| \geqslant \min(||x_i||, ||y_i||).$$

Ponieważ dla dostatecznie dużych i zachodzi:

$$N(x_i) < c < N(y_i),$$

to można znaleźć liczby t_i takie, że $N(\gamma_i(t_i)) = c$ dla prawie wszystkich i. Wynika z tego, że poziomica zadawana przez c jest nieograniczona, a przez to niezwarta, co kończy dowód. □

Lemat 3.4. *Dany jest wielomian $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Jeśli istnieją ciągi $x_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ takie, że $||x_i||, ||y_i|| \to \infty$ oraz $P(x_i) \to \infty, P(y_i) \to -\infty$ to P jest niewłaściwy.*

Dowód. Lemat można dowieść bezpośrednio z lematu 3.3, zamiast tego jednak przedstawimy geometryczny punkt widzenia. Rozważmy P, x_i, y_i jak w sformułowaniu lematu. Załóżmy nie wprost, że P przedłuża się do odwzorowania $S^m \to S^1$. Ciągi x_i, y_i zadają ciągi punktów na S^m - uzwarceniu Aleksandrowa $\mathbb{R}^m$. Możemy następnie zdefiniować $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ tak, by:

$$\gamma(n) = x_n, \quad \gamma(-n) = y_n,$$

a to odwzorowanie (właściwe) przedłużyć do odwzorowania $S^1 \to S^m$. Otrzymujemy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\gamma\circ\hat{P}"] \arrow[dr, "\gamma"] & S^1 \\ & S^m \arrow[u, "\hat{P}"'] \end{tikzcd}$$

W grupach podstawowych analogiczny diagram wygląda następująco:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\gamma_*\circ\hat{P}_*"] \arrow[dr, "\gamma_*"] & \mathbb{Z} \\ & 0 \arrow[u, "\hat{P}_*"'] \end{tikzcd}$$

Z drugiej strony $P(x_i) \to \infty, P(y_i) \to -\infty$, z czego wynika, że $\gamma \circ \hat{P}$ zadaje nietrywialny element $\pi_1(S^1)$. Daje to sprzeczność z powyższym diagramem. □

Lemat 3.4 stanowi motywację dla następującej definicji:

Definicja 3.5. Przez $\mathcal{P}^+_{m,n}$ rozumiemy wielomiany właściwe $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stopnia n takie, że dla:

$$||v_i|| \to \infty \implies P(v) \to +\infty.$$

Analogicznie definiujemy $\mathcal{P}^-_{m,n}$.

3.2 Wielomiany trwale właściwe i trwale niewłaściwe

Definicja 3.6. Wielomian jednorodny stopnia H nazywamy **trwale właściwym**, jeśli każdy wielomian o części głównej równej H jest właściwy. Podobnie H nazywamy **trwale niewłaściwym** jeśli każdy wielomian o części głównej równej H jest niewłaściwy.

Zagadnienie trwałej właściwości lub trwałej niewłaściwości wielomianu rozstrzygniemy następującymi obserwacjami:

Uwaga 3.7. Jeśli H jest wielomianem jednorodnym który poza 0 przyjmuje wartości ściśle dodatnie, to H jest właściwy i zgodnie z lematem 2.6 jest trwale właściwy. Analogicznie jeśli H przyjmuje poza 0 wartości ściśle ujemne, to H jest trwale właściwy.

Lemat 3.8. *Niech H będzie wielomianem jednorodnym przyjmującym wartości różnych znaków. Wówczas H jest trwale niewłaściwy.*

Dowód. Niech $w, v \in \mathbb{R}^m$ będą takimi wektorami, że $H(w) > 0$ i $H(v) < 0$. Rozważmy dowolny wielomian $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ o części głównej równej H. Niech $P_w(t) = P(tw)$ oraz $P_v(t) = P(tv)$. Skoro:

$$H(w) \neq 0, H(v) \neq 0,$$

to $H_w(t) = H(tw)$ jest częścią główną P_w, a $H_v(t) = H(tv)$ jest częścią główną P_v. W takim razie wraz z $t \to \infty$ zachodzi $P_w(t) \to +\infty, P_v(t) \to -\infty$. To znaczy jednak, że spełnione jest założenie lematu 3.4, a w takim razie P jest niewłaściwy. □

Wniosek 3.9. *$\mathcal{P}_{m,n}$ jest pusty dla nieparzystych n.*

Lemat 3.10. *Niech H będzie nieujemnym (analogicznie - niedodatnim) wielomianem jednorodnym stopnia $n \geq 3$ posiadającym 0 na sferze jednostkowej. Wówczas H nie jest ani trwale właściwy, ani trwale niewłaściwy.*

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że H jest nieujemne. Niech v będzie wektorem ze sfery jednostkowej takim, że $H(v) = 0$. Przy użyciu standardowego iloczynu skalarnego określonego na $\mathbb{R}^n$ możemy rozważyć następujący wielomian:

$$N(x) = H(x) + \langle x, v\rangle.$$

□

Dla dowolnego $r > 0$ na wektorach $rv, -rv$ przyjmuje on wartości różnych znaków. Powtarzając argument z lematu 3.4 możemy zauważyć, że w takim razie N jest niewłaściwy.

Z drugiej strony możemy rozważyć wielomian:

$$P(x) = H(x) + ||x||^2 \text{ (analogicznie } -||x||^2 \text{ gdy } P \text{ jest niedodatni).}$$

Taki wielomian spełnia następującą nierówność:

$$||P(x)|| \geq \sqrt{||x||},$$

skąd wynika jego właściwość. Ponieważ częścią główną zarówno N jak i P jest wielomian H, to teza została udowodniona.

Wniosek 3.11. *Zbiór wielomianów które nie są ani trwale właściwe, ani trwale niewłaściwe jest domknięty w przestrzeni wielomianów m zmiennych stopnia n.*

Dowód. Rozważmy ciąg P_i wielomianów, które nie są trwale właściwe ani trwale niewłaściwe i załóżmy, że ten ciąg jest zbieżny do pewnego wielomianu P. W takim razie części główne H_i wielomianów P_i zbiegają do części głównej H wielomianu P. Oznacza to również, że $H_i(x) \to H(x)$ dla każdego x ze sfery jednostkowej. Jeśli bez straty ogólności założymy, że wszystkie H_i były nieujemne, to z powyższego rozumowania wynika, że również H jest nieujemne. Teraz wybierzmy ciąg x_i taki, że:

$$||x_i|| = 1, \quad H_i(x_i) = 0.$$

Ze zwartości sfery wynika, że ciąg x_i posiada podciąg zbieżny do pewnego punktu x. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na kuli jednostkowej H_i zbiega jednostajnie do H, a zatem dla pewnego N zachodzi:

$$i > N, \quad ||v|| = 1 \implies ||H(v) - H_i(v)|| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

W takim razie dla $i > N$ prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$||H(x_i)|| \leqslant ||H_i(x_i)|| + ||(H - H_i)(x_i)|| \leqslant 0 + k\frac{\varepsilon}{k}||x_i|| = \varepsilon,$$

skąd $H(x_i) \to 0$. Z ciągłości H wynika, że $H(x) = 0$. To dowodzi tego, że H jest nieujemnym wielomianem posiadającym 0 na sferze jednostkowej, a zatem P nie jest ani trwale właściwy ani trwale niewłaściwy. Stąd wynika, że zbiór takich wielomianów jest domknięty. □

Szczególny przypadek występuje dla $n = 2$ – wtedy pojęcia właściwości i trwałej właściwości pokrywają się.

Twierdzenie 3.12. *Wielomian $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stopnia 2 jest właściwy wtedy i tylko wtedy gdy forma kwadratowa będąca jego częścią główną jest właściwa (czyli dodatnio lub ujemnie określona).*

Dowód. Rozważmy wielomian $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stopnia 2. Skoro jego część główna jest formą kwadratową m zmiennych, to poprzez zamianę bazy można ją zapisać w następującej postaci:

$$H(x) = \sum c_i x_i^2.$$

Jeśli wszystkie c_i są niezerowe to zgodnie z lematami 3.3 i 3.4 wielomian P jest właściwy dokładnie wtedy gdy wszystkie c_i są tego samego znaku. Z kolei gdy pewne $c_i = 0$, to możemy rozważyć P obcięty to prostej generowanej przez x_i. Taki wielomian jest liniowy, więc albo jest stały albo przyjmuje różne znaki na $rx_i, -rx_i$ dla pewnego R i $r > R$. W pierwszym przypadku P jest wprost niewłaściwy, w drugim jego niewłaściwość wynika z argumentu z lematu 3.4. □

3.3 Zbiory $\mathcal{P}_{m,n}$ i $\mathcal{N}_{m,n}$

Twierdzenie 3.13. *$\mathcal{P}_{m,n}$ i $\mathcal{N}_{m,n}$ są zbiorami semialgebraicznymi.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{N}_{m,n}$ można zadać następującą formułą języka ciał rzeczywiście domkniętych:

$$\phi(\text{coeff}(P)) = (\exists M)(\forall r)(\exists x)(||x|| > r, ||P(x)|| < M),$$

gdzie przez coeff(P) rozumiemy krotkę współczynników wielomianu P. Ponieważ język ciał rzeczywiście domkniętych posiada własność eliminacji kwantyfikatorów, to istnieje pozbawiona kwantyfikatorów formuła ψ tego języka taka, że:

$$\phi(\overline{x}) \iff \psi(\overline{x}).$$

Oznacza to, że można zdefiniować $\mathcal{N}_{m,n}$ przy pomocy równań i nierówności wielomianowych. Dowodzi to semialgebraiczności $\mathcal{N}_{m,n}$, a w rezultacie także jego dopełnienia, czyli $\mathcal{P}_{m,n}$. □

Następujące twierdzenie pokazuje, że dla parzystych n zbiory $\mathcal{N}_{m,n}, \mathcal{P}_{m,n}$ są istotnie definiowane wyłącznie przez nierówności wielomianowe.

Uwaga 3.14. $\mathcal{P}_{m,n}$ oraz $\mathcal{N}_{m,n}$ dla parzystego $n > 2$ nie zawiera się w miejscach zerowych żadnego nietrywialnego wielomianu.

Dowód. Zgodnie z 3.11 zbiory wielomianów trwale właściwych i trwale niewłaściwych są otwarte w przestrzeni wielomianów rzeczywistych m zmiennych stopnia n. Dodatkowo dla parzystego $n > 2$ oba są niepuste. Wynika z tego, że ich nadzbiory - odpowiednio $\mathcal{P}_{m,n}$ oraz $\mathcal{N}_{m,n}$ - nie mogą się zawierać w miejscach zerowych żadnego niezerowego wielomianu. □

Wniosek 3.15. *$\mathcal{P}_{m,n}$ dla parzystych $n > 2$ nie jest zbiorem algebraicznym.*

Twierdzenie 3.16. *$\mathcal{P}_{m,2n}$ dla $n > 1$ nie jest ani zbiorem otwartym ani zbiorem domkniętym.*

Dowód. Wystarczy podać przykłady ciągów odpowiednich wielomianów właściwych dążących do wielomianu niewłaściwego i odwrotnie. Istotnie, niech $\overline{x} = (x_1, ..., x_2) \in \mathbb{R}^m$. Rozważmy wielomiany:

$$P_i(\overline{x}) = x_1^{2n} + \frac{1}{i}||\overline{x}||^2.$$

Każdy z nich jest właściwy, ale ich granicą jest wielomian x_1^{2n}, który jest niewłaściwy. Podobnie wielomiany:

$$N_i(\overline{x}) = x_1^{2n} + \frac{1}{i}x_2^{2n-1} + ||\overline{x}||^2$$

są niewłaściwe, ale dążą do właściwego wielomianu P_1. Aby przekonać się, że wielomiany N_i są niewłaściwe należy zauważyć, że po ustaleniu i istnieje R takie, że dla $r > R$ zachodzi:

$$\operatorname{sgn}(N_i(0, r, 0, ..., 0)) = \operatorname{sgn}(r^{2n-1} + r^2) \neq \\ \operatorname{sgn}(-r^{2n-1} + (-r)^2) = \operatorname{sgn}(N_i(0, -r, 0, ..., 0)),$$

a następnie kontynuować jak w lemacie 3.4. □

Twierdzenie 3.17. *Niech $n > 2$. Wówczas $\mathcal{P}^+_{m,2n}$, $\mathcal{P}^-_{m,2n}$ są niepuste, a ich domknięcia w przestrzeni wielomianów m zmiennych stopnia $2n$ są rozłączne.*

Dowód. Niepustość wynika z istnienia właściwych wielomianów odpowiednio $||v||^{2n}, -||v||^2$. Aby udowodnić drugą część lematu przypuśćmy nie wprost że nie jest on prawdziwy. Wówczas istnieją ciągi P_i^+, P_i^- należące do odpowiednio $\mathcal{P}^+_{m,2n}$, $\mathcal{P}^-_{m,2n}$ zbieżne według współczynników do pewnego P. Wynika z tego, że również ich części główne H_i^+, H_i^- zbiegają do H - części głównej P. Taka część jest niezerowa w pewnym punkcie v sfery jednostkowej. Ponieważ jednak H_i^+, H_i^- zbiegają do H według współczynników, to zbiegają też punktowo. Skoro $P_i^+ \in \mathcal{P}^+_{m,2n}, P_i^- \in \mathcal{P}^-_{m,2n}$, to:

$$H_i^+(v) > 0, \quad H_i^-(v) < 0.$$

Stąd $H(v) = 0$, co daje sprzeczność z wyborem v. □

Twierdzenie 3.18. *$\mathcal{P}_{m,2n}$ dla $n > 1$ jest sumą dwóch zbiorów ściągalnych. $\mathcal{N}_{m,2n}$ dla $n > 1$ ma typ homotopii S^{d-2}, gdzie $d = \binom{2n+m-1}{m-1}$.*

Dowód. Zauważmy, że $\mathcal{P}^+_{m,2n}$ oraz $\mathcal{P}^-_{m,2n}$ są zbiorami wypukłymi. Istotnie, załóżmy, że $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^+_{m,2n}$ i niech $r \in \mathbb{R}$. Z właściwości P_1, P_2 wynika, że istnieją takie zbiory zwarte K_1, K_2, że dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^m$:

$$v \notin K_1 \implies P_1(v) > r,$$

$$v \notin K_2 \implies P_2(v) > r,$$

a w takim razie:

$$v \notin K_1 \cup K_2 \implies tP_1(v) + (1-t)P_2(v) > r.$$

Ponieważ r było dowolną liczbą rzeczywistą, to kombinacja liniowa $tP_1(v) + (1-t)P_2(v)$ jest właściwa, co dowodzi wypukłości $\mathcal{P}^+_{m,2n}$. Podobnie dowodzi się wypukłości $\mathcal{P}^-_{m,2n}$.

Rozważmy teraz przestrzeń wszystkich wielomianów jednorodnych m zmiennych stopnia $2n$. Taka przestrzeń ma bazę w postaci liniowo niezależnych jednomianów, a tych z kolei jest tyle, na ile sposobów można wybrać m liczb naturalnych sumujących się do $2n$, czyli:

$$\binom{2n+m-1}{m-1}.$$

Jedyna kombinacja liniowa takich jednomianów, która nie jest wielomianem jednorodnym stopnia $2n$, to kombinacja zerowa. Wynika z tego, że przestrzeń tych ostatnich wielomianów ma typ homotopii:

$$\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \sim S^{d-2}.$$

Ponieważ powyższa przestrzeń jest retraktem deformacyjnym przestrzeni wszystkich wielomianów m zmiennych stopnia $2n$, to $\mathcal{N}_{m,2n}$ ma typ homotopii sfery wymiaru $(d-1)$ pozbawionej dwóch zbiorów wypukłych, czyli S^{d-2}. $\square$

4 Odwzorowania wielomianowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

4.1 Dwa opisy wielomianowych odwzorowań $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

W trakcie tego rozdziału zajmiemy się odwzorowaniami $S^2 \to S^2$ pochodzącymi od wielomianów właściwych. Takie odwzorowania można opisywać na dwa sposoby:

- jako wielomiany $P(z, \overline{z})$ o zespolonych współczynnikach
- jako pary wielomianów $P_1(x, y), P_2(x, y)$ o rzeczywistych współczynnikach.

Następujący lemat pokazuje, że dwa powyższe opisy są równoważne:

Lemat 4.1. *Jeśli $P(z, \overline{z})$ jest wielomianem stopnia n, to istnieją wielomiany $R, I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stopnia co najwyżej n takie, że:*

$$P(x + iy, x - iy) = R(x, y) + i \cdot I(x, y).$$

Odwrotnie, dla pary wielomianów $R, I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stopnia co najwyżej n istnieje wielomian zespolony P stopnia co najwyżej n taki, że $R(x, y) + i \cdot I(x, y) = P(x + iy, x - iy)$.

Dowód. Niech $\overline{P}$ oznacza wielomian powstały z P poprzez sprzężenie wszystkich współczynników i zmiennych występujących w wielomianie. Aby zapisać wielomian zespolony $P(z, \overline{z})$ poprzez dwa wielomiany rzeczywiste zmiennych x, y zdefiniujmy:

$$R(x, y) = \mathrm{Re}(P(x + iy, x - iy)) = \frac{1}{2}((P + \overline{P})(x + iy, x - iy)),$$

$$I(x, y) = \mathrm{Im}(P(x + iy, x - iy)) = -i\frac{1}{2}((P - \overline{P})(x + iy, x - iy)),$$

Ponieważ R, I przyjmują wyłącznie rzeczywiste wartości, to mają wyłącznie rzeczywiste współczynniki, czyli spełniają tezę lematu.

W drugą stronę możemy rozważyć posiadający zespolone współczynniki wielomian zmiennych rzeczywistych x, y:

$$R(x, y) + iI(x, y),$$

a następnie podstawić $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$. □

Druga notacja pozwala badać właściwość wielomianów z nieco innego punktu widzenia. W tym celu wprowadzimy poniższą definicję:

Definicja 4.2. Zespoloną prostą rzutową $\mathbb{C}P^1$ nazywamy przestrzeń $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ wydzieloną przez relację:

$$(w, z) \sim (kw, kz) \text{ dla } k \in \mathbb{C}^*.$$

.

Uwaga 4.3. Wielomiany $z, \overline{z}$ można rozpatrywać jako (niekoniecznie ciągłe) odwzorowania $p : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ zadane następująco:

$$p(z, 1) = (P(z, \overline{z}), 1),$$
$$p(1, z) = (1, P(z^{-1}, \overline{z}^{-1})).$$

W takim ujęciu właściwość wielomianu P jest równoważna ciągłości funkcji p w punkcie ∞.

Uwaga 4.4. Zespolony punkt widzenia pozwala wprowadzić mnożenie wielomianów $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ poprzez odziedziczenie mnożenia z wielomianów $z, \overline{z}$. Korzystając z multiplikatywności normy w zespolonym sensie można zauważyć, że jeśli P_1, P_2 są właściwe, to również $P_1 \cdot P_2$ jest właściwy. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe.

4.2 Różnice pomiędzy odwzorowaniami $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Pojęcie właściwości w przypadku wielomianów $z, \overline{z}$ odbiega od swojego odpowiednika dla wielomianów $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Ilustrują to poniższe przykłady:

Przykład 4.5. Para niewłaściwych wielomianów $x^2, x^2 - y$ o wspólnym zerze części głównej daje właściwe odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Przykład 4.6. Para wielomianów:

$$P_1(x, y) = y(x^2 + 1) - x, P_2(x, y) = y^2(x^3 + 1) - x$$

daje niewłaściwe odwzorowanie (dla $n > 0$ zachodzi $P_1(2^n, 2^{-n}), P_2(2^n, 2^{-n}) < 1$), które jednak nie posiada niezwartej poziomicy. Istotnie, rozważmy poziomicę względem (c_1, c_2). Możemy wówczas wyliczyć:

$$y = \frac{x + c_1}{x^2 + 1},$$

a następnie rozwiązać równanie:

$$\left(\frac{x + c_1}{x^2 + 1}\right)^2 \cdot x^3 - x = c_2,$$

$$(x+c_1)^2x^3 = (x+c_2)(x^2+1)^2,$$
$$x^5+2c_1x^4+c_1x^3 = x^5+c_2x^4+2x^3+2c_2x^2+x+c_2,$$
$$(2c_1-c_2)x^4+(c_1-2)x^3-2c_2x^2-x-c_2=0.$$

Ponieważ jednak dla dowolnych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ powyższy wielomian jest niestały, to takie równanie ma tylko skończenie wiele rozwiązań.

4.3 Trwale właściwe wielomianowe odwzorowania $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Lemat 4.7. *Jednorodny wielomian $z, \overline{z}$ można rozłożyć na iloczyn czynników liniowych.*

Dowód. Weźmy wielomian jednorodny $z, \overline{z}$ stopnia n i zapiszmy go w postaci:

$$P(z,\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{(n-i)}\overline{z}^i.$$

Możemy mu przypisać zwyczajny wielomian zespolony w następujący sposób:

$$Q_P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{(n-i)}.$$

Zgodnie z zasadniczym twierdzeniem algebry wielomian ten faktoryzuje się poprzez:

$$Q_P(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z-c_i),$$

gdzie c, c_i są pewnymi stałymi zespolonymi. Zachodzi przy tym:

$$a_i = c\sum_{j_1\neq j_2\neq \ldots \neq j_{n-i}} (-1)^{n-1} c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_{n-i}}$$

W takim razie jednak bezpośrednie sprawdzenie daje następujący wzór:

$$P(z,\overline{z}) = c\prod_{i=1}^{n}(z-c_i\overline{z}).$$

□

Lemat 4.8. *$P(z,\overline{z}) = z - c\overline{z}$ ma pierwiastek na okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $||c|| = 1$.*

Dowód. Jeśli $||c|| = 1$, to dla d takiego, że $d^2 = c$ zachodzi:

$$(z - c\overline{z}) = d(\overline{d}z - d\overline{z}) = id\mathrm{Im}(\overline{d}z)$$

i wówczas P ma pierwiastek na okręgu jednostkowym. Odwrotnie, jeśli $||c|| \neq 1$, to dla dowolnego $z \in \mathbb{C}^*$:

$$||c\overline{z}|| = ||c|| \cdot ||\overline{z}|| \neq ||z||.$$

W takim razie P nie ma niezerowego pierwiastka, a przez to jest właściwy. □

Twierdzenie 4.9. *Żaden wielomian $z, \overline{z}$ stopnia $\geqslant 2$ nie jest trwale niewłaściwy.*

Dowód. Rozważmy wielomian $P(z, \overline{z})$ stopnia $n \geqslant 2$. Zgodnie z lematem 4.7 istnieje faktoryzacja:

$$P(z, \overline{z}) = c \prod_{i=1}^{k} (z - e_i\overline{z}) \prod_{k+1}^{n} (z - c_i\overline{z}),$$

gdzie $||c_i|| \neq 1, ||e_i|| = 1$. Rozważmy dwa przypadki:

1) $k > 1$ (gdzie k jest określone w powyższej faktoryzacji). Niech:

$$P_1(z, \overline{z}) = \prod_{i=1}^{k} (z - e_i\overline{z})$$

Dla każdego e_i wybierzmy f_i takie, że $f_i^2 = e_i$. Zgodnie z dowodem lematu 4.8 zachodzi:

$$P_z(z, \overline{z}) = \prod_{i=1}^{k} (if_i)\mathrm{Im}(f_i^{-1}).$$

Wynika z tego, że obraz P_1 zawiera się w rzeczywistej prostej $r \cdot i^k \prod_{i=1}^{k} f_i : r \in \mathbb{R}$. Jeżeli teraz do P_1 dodamy czynnik liniowy o jądrze różnym od rzeczywistych prostych $\mathrm{Im}(f_i^{-1}z) = 0$ dla $i = 1, ..., k$ oraz obrazie ortogonalnym do obrazu P_1 (w sensie standardowego iloczynu na $\mathbb{R}^2$), to dostaniemy wielomian właściwy o tej samej części głównej co P_1. Istotnie, niech z_0 będzie taką liczbą, że $\mathrm{Im}(f_i^{-1}z) \neq 0$ dla $i = 1, ..., k$. Rozważmy wielomian:

$$Q_1(z,\overline{z}) = \frac{1}{i^k \prod_{i=1}^k f_i}(P_1(z,\overline{z}) + (\frac{z}{z_0} - \frac{\overline{z}}{\overline{z_0}})i^k \prod_{i=1}^k f_i) = \prod_{i=1}^k \mathrm{Im}(\frac{z}{f_i}) + i\mathrm{Im}(\frac{z}{z_0}).$$

Ustalmy teraz $M > 0$. Pokażemy, że poza pewnym zbiorem zwartym $||Q_1(z,\overline{z})|| > M$. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie:

$$R(z,b) = \{z' : \mathrm{Im}(\frac{z'}{z}) < b\}.$$

Jeśli $z \notin R(z_0, b)$, to:

$$\mathrm{Im}(Q_1(z,\overline{z})) = \mathrm{Im}(\frac{z}{z_0}) \geqslant b$$

i w związku z tym:

$$||Q_1(z,\overline{z})|| \geqslant ||\mathrm{Im}(Q_1(z,\overline{z}))|| \geqslant M.$$

Z drugiej strony jeśli $z \notin \bigcup_{i=1}^k R(f_i, \sqrt[k]{M})$, to:

$$||Q_1(z,\overline{z})|| \geqslant ||\mathrm{Re}(Q_1(z,\overline{z}))|| = |\prod_{i=1}^k \mathrm{Im}(\frac{z}{f_i})| \geqslant \sqrt[k]{M}^k = M.$$

Oznacza to, że:

$$\{z : ||Q_1(z,\overline{z})|| < M\} \subseteq R(z_0,b) \cap \bigcup_{i=1}^k R(f_i, \sqrt[k]{M}).$$

Ponieważ jednak z_0 nie jest rzeczywistą krotnością żadnej z liczb f_i, to powyższy zbiór jest zwarty, co dowodzi właściwości Q_1. Zgodnie z uwagą 4.4 wielomian $Q_2(z,\overline{z}) = \prod_{k+1}^n (z - c_i\overline{z})$ również jest właściwy, a w takim razie $\frac{c}{i^k \prod_{i=1}^k f_i} Q_1(z,\overline{z})Q_2(z,\overline{z})$ jest właściwy i posiada część główną równą wielomianowi P.

2) $k = 1$. Niech teraz:

$$P_1 = c(z - e_1\overline{z})(z - c_2\overline{z}), P_2 = \prod_3^n (z - c_i\overline{z}).$$

Ponownie jak poprzednio wybieramy f_1 takie, że $f_1^2 = e_1$ i wyliczamy:

$$P_1(z,\overline{z}) = c(z - e_1\overline{z})(z - c^2\overline{z}) = c(if_1\mathrm{Im}(\frac{z}{f_1}))(z - c^2\overline{z}).$$

Ponieważ jednak $||(if_1\mathrm{Im}(\frac{z}{f_1} + f_1)|| \geqslant 1$, to z multiplikatywności normy wynika, że właściwy jest wielomian:

$$Q(z,\overline{z}) = c(if_1\mathrm{Im}(\frac{z}{f_1}) + f_1)(z - c^2\overline{z}).$$

Stąd podobnie jak poprzednio $Q(z,\overline{z})P_2(z,\overline{z})$ jest właściwy i posiada część główną równą $P(z,\overline{z})$. $\square$

5 Stopień i metody jego obliczania

Twierdzenie 5.1. *Niech $P(z, \overline{z})$ będzie właściwym wielomianem jednorodnym. Wówczas stopień przedłużenia P do odwzorowania $S^2 \to S^2$ jest równy indeksowi krzywej $P(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]$ wokół 0.*

Dowód. Indeks krzywej $P(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]$ wokół 0 jest równy topologicznemu stopniowi odwzorowania $\gamma_P : S^1 \to S^1$ zadanemu poprzez:

$$\gamma_P(e^{i\theta}) = \frac{P(e^{i\theta}, e^{-i\theta})}{||P(e^{i\theta}, e^{-i\theta})||}.$$

Rozważmy teraz dowolną wartość regularną $z_0 = e^{i\alpha}$. Ponieważ P jest jednorodny, to każdy punkt w przeciwobrazie z_0 - wartości regularnej γ_P pochodzi od jednego punktu $P^{-1}(z_0)$:

$$\gamma_P(z) = z_0 \iff \exists! w \in \mathbb{C}^* : P(w, \overline{w}) = z_0, \arg(z) = \arg(w).$$

Dodatkowo dla w takiego jak wyżej, zachodzi $\operatorname{sgn}(\det(P'(w, \overline{w}))) = \operatorname{sgn}(\det(\gamma'_P(z_0)))$. W takim razie wprost z definicji stopnia wyrażonej w twierdzeniu 1.13 γ_P i stopień przedłużenia P do odwzorowania $S^2 \to S^2$ są równe. □

Fakt 5.2. Zgodnie z zasadą argumentu indeks krzywej $P(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]$ wokół 0 jest równy $M - N$, gdzie M to suma krotności zer funkcji $P(z, z^{-1})$ w obszarze $B(0, 1)$, a N - sumą krotności biegunów funkcji $P(z, z^{-1})$ w obszarze $B(0, 1)$.

Twierdzenie 5.1 można uogólnić w następujący sposób:

Twierdzenie 5.3. *Niech f będzie odwzorowaniem właściwym $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i niech r będzie takie, że $f^{-1}(0) \in \overline{B(0, r - \varepsilon)}$. Wówczas stopień przedłużenia f do odwzorowania $S^2 \to S^2$ jest równy indeksowi krzywej $f(e^{i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]$ wokół 0.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.1 zamiast liczyć indeks krzywej zdefiniowanej w tezie twierdzenia będziemy liczyć stopień topologiczny odwzorowania $\gamma_f : S^1 \to S^1$:

$$\gamma_P(e^{i\theta}) = \frac{f(re^{i\theta})}{||f(re^{i\theta})||}.$$

Dla wygody obliczeń znajdźmy odwzorowanie właściwe g które będzie właściwie homotopijne z f o tej własności, że:

$$||g(x, y)|| = ||(x, y)||.$$

Naturalnym kandydatem jest:

$$g(x,y) = f(x,y)\frac{||(x,y)||}{||f(x,y)||}.$$

Trzeba jednak pokazać, że f i g są właściwie homotopijne. W tym celu rozważmy następującą homotopię:

$$H((x,y),t) = f(x,y)\left((1-t) + t\frac{||(x,y)||}{||f(x,y)||}\right).$$

Wprost ze wzoru wynika, że jest to ciągła homotopia funkcji $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ponieważ:

$$||H((x,y),t)|| \geqslant \min\{||(x,y)||, ||f(x,y)||\},$$

to dla dowolnych ciągów x_n, y_n, t_n:

$$||(x_n, y_n)|| \to \infty \implies ||H((x_n,y_n),t_n)|| \to \infty,$$

a zatem jest to również homotopia właściwa.

Niech D_∞ oznacza dysk na S^2 (traktowanej jako uzwarcenie Aleksandrowa $\mathbb{R}^2$) będący dopełnieniem $B(0,r)$. Rozważmy ciąg dokładny pary (S^2, D_∞):

$$H_2(D_\infty) \xrightarrow{\partial} H_2(S^2) \xrightarrow{\partial} H_2(S^2, D_\infty) \xrightarrow{\partial} H_1(D_\infty).$$

Ponieważ:

$$H_2(D_\infty) \cong H_1(D_\infty) \cong 0,$$

to zachodzi następujący izomorfizm:

$$H_2(S^2, D_\infty) \cong H_2(S^2) \cong Z^2.$$

Zgodnie z twierdzeniem o wycinaniu mamy jednak:

$$H_2(S^2, D_\infty) \cong H_2(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty),$$

gdzie D'_∞ jest dopełnieniem $B(0, r+\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Ponieważ:

$$(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty) \sim (D^2, \partial D^2),$$

to z następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} H_2(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty) & \xrightarrow{\cong} & H_1(D_\infty \setminus D'_\infty) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_2(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\cong} & H_1(S^1) \end{array}$$

możemy wywnioskować, że:

$$H_2(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty) \cong H_1(D_\infty \setminus D'_\infty) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Teraz zauważmy, że funkcja g jest tak dobrana, że zadaje odwzorowanie każdej z powyższych podprzestrzeni S^2 w samą siebie. Ponieważ wszystkie powyższe izomorfizmy były funktorialne, to otrzymujemy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(S^2) & \xrightarrow{\cong} & H_2(S^2, D_\infty) & \xrightarrow{\cong} & H_2(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty) & \xrightarrow{\cong} & H_1(D_\infty \setminus D'_\infty) \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ H_2(S^2) & \xrightarrow{\cong} & H_2(S^2, D_\infty) & \xrightarrow{\cong} & H_2(S^2 \setminus D'_\infty, D_\infty \setminus D'_\infty) & \xrightarrow{\cong} & H_1(D_\infty \setminus D'_\infty) \end{array}$$

Wynika z niego, że stopień g można policzyć obliczając odwzorowanie $g_* : H_1(D_\infty \setminus D'_\infty) \to H_1(D_\infty \setminus D'_\infty)$. To jednak jest równe stopniowi odwzorowania:

$$\gamma_g : S^1 \to S^1,$$

$$\gamma_g(e^{i\theta}) = \frac{g(re^{i\theta})}{||g(re^{i\theta})||},$$

które jest homotopijne z odwzorowaniem γ_f.

$\square$

Wniosek 5.4. *Właściwy wielomian $z, \overline{z}$ stopnia n zadaje odwzorowanie $S^2 \to S^2$ stopnia co najwyżej n.*

Dowód. Rozważmy właściwy wielomian $P(z, \overline{z})$ stopnia n. Niech r będzie takie, że $P^{-1}(\{0\}) \subset B(0, r)$. Twierdzenie 5.3 mówi, że aby obliczyć stopień zadawanego przez niego odwzorowania $S^2 \to S^2$ wystarczy obliczyć indeks krzywej $\gamma_P(e^{i\theta}) = P(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ wokół 0. Ponieważ:

$$||(x, y)|| = r \implies \overline{z} = r^2 z^{-1},$$

to równie dobrze możemy rozważyć funkcję wymierną zadaną poprzez:

$$Q(z) = P(z, r^2 z^{-1}).$$

Skoro stopień $\gamma_P = \gamma_Q$ jest równy indeksowi krzywej $Q(re^{i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]$, to zgodnie z zasadą argumentu można go obliczyć poprzez różnicę sumy krotności zer Q leżących w $B(0, r)$ i sumy krotności biegunów Q leżących w $B(0, r)$. Ponieważ wiemy, że P był stopnia n, to możemy zapisać:

$$Q(z) = \frac{R(z)}{z^n},$$

gdzie $R(z)$ jest wielomianem zespolonym. W takim razie suma krotności zer leżących w $B(0, r)$ zawiera się w przedziale $[0, 2n]$, a suma krotności biegunów wynosi $-n$. Stąd indeks wspomnianej krzywej należy do przedziału $[-n, n]$. Zgodnie z wcześniejszym rozumowaniem stopień topologiczny przedłużenia P również należy do przedziału $[-n, n]$. $\square$

6 Literatura

[BS19] Tomás Bajbar and Oliver Stein. Coercive polynomials: stability, order of growth, and newton polytopes. *Optimization*, 68:124 – 99, 2019.

[Hat00] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction.* Springer New York, 2002.

[Seg79] Graeme Segal. The topology of spaces of rational functions. *Acta Mathematica*, 143(none):39 – 72, 1979.