Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocławski
TEST KWALIFIKACYJNY NA STUDIA DOKTORANCKIE
Wrocław, 23 maja 2016.

Zadanie 1.
a) Podaj jedną parę liczb naturalnych $m < n$ takich, że

$$m^n = n^m.$$

b) Rozważając funkcję $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ udowodnij, że wskazana przez Ciebie para jest jedyna.

c) Udowodnij, że

$$3 \cdot 33^{32} < 32^{33}.$$

Zadanie 2. Rozważmy ośrodkową przestrzeń Hilberta $\mathbb{H}$ (nad ciałem liczb zespolonych) wraz z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, normą $\| \cdot \|$ i bazą ortonormalną $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na $\mathbb{H}$, spełniającym $Ae_n = \lambda_n e_n$ dla pewnych $\lambda_n \in \mathbb{C}$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

a) Udowodnij, że norma operatora A jest równa $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$.

b) Udowodnij, że jeśli $\lambda_n \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to A jest samosprzężony.

c) Dla dowolnej liczby naturalnej N podaj przykład operatora liniowego B na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ o wartościach własnych 1 oraz -1, którego norma jest większa od N.

Zadanie 3. Niech K będzie dowolnym ciałem zaś λ, μ jego różnymi elementami. O przekształceniu liniowym $F : K^3 \to K^3$ wiadomo, że
(1) $(F - \lambda \cdot Id)(F - \mu \cdot Id) \neq 0$,
(2) $(F - \mu \cdot Id)^2 \neq 0$ oraz
(3) $(F - \lambda \cdot Id)(F - \mu \cdot Id)^2 = 0$.
(Id to przekształcenie identycznościowe przestrzeni K^3). Wykazać, że
(a) λ, μ są wartościami własnymi przekształcenia F,
(b) $Ker(F - \mu \cdot Id) \subseteq Im(F - \mu \cdot Id)$,
(c) F ma w pewnej bazie macierz $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Zadanie 4. Niech G będzie grupą skończoną, która nie posiada dwóch podgrup tego samego rzędu.
(a) Pokazać, że dowolna podgrupa grupy G jest jej dzielnikiem normalnym.
(b) Pokazać, że jeśli G jest nietrywialna, to jest izomorficzna z produktem swoich podgrup Sylowa.
(c) Korzystając z (b) wykazać, że G jest cykliczna.

Wskazówka. W punkcie (b) zastosowanie indukcji względem ilości podgrup Sylowa może okazać się pomocne.

Zadanie 5. Dwuargumentowe spójniki logiczne $|$ oraz $*$ określamy następująco: $p|q$ definiujemy jako $\neg(p \wedge q)$, zaś $p * q$ jako $\neg(p \vee q)$.
(a) Pokazać, że jeśli $\alpha(p,q)$ jest formułą zdaniową o dwóch zmiennych p,q, to
(1) $\alpha(p,q)$ jest równoważna pewnej formule zdefiniowanej tylko przy pomocy $|$,
(2) $\alpha(p,q)$ jest równoważna pewnej formule zdefiniowanej tylko przy pomocy $*$.
(b) Niech $\alpha(p,q)$ będzie formułą zdaniową o dwóch zmiennych p,q taką, że dowolna formuła zdaniowa o zmiennych p,q jest równoważna pewnej formule zdefiniowanej tylko przy pomocy α. Wykazać, że wtedy $\alpha(p,q)$ jest równoważna formule $p|q$ lub formule $p * q$.

Zadanie 6. Niech F będzie ograniczonym wielokątem wypukłym na płaszczyźnie.

a) Uzasadnij, że istnieje koło K, takie że jeśli elipsa zawiera F i nie jest zawarta w K, to pole tej elipsy jest większe od 1.

b) Uzasadnij, że istnieje (być może nie jedyna) elipsa o najmniejszym polu zawierająca wielokąt F.

Zadanie 7. Na pierścieniu $\mathbf{F}_p[[X]]$ szeregów formalnych o współczynnikach w ciele p-elementowym określamy metrykę wzorem

$$d(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = p^{-\min\{n | a_n \neq b_n\}}.$$

a) Sprawdź, że d spełnia nierówność trójkąta.

b) Udowodnij, że otwarta kula (względem metryki d) o środku w 0 i dowolnym dodatnim promieniu jest zwartym ideałem w $\mathbf{F}_p[[X]]$.

Zadanie 8. Prawdopodobieństwo pojawienia się orła w rzucie monetą jest równe p, a reszki $q = 1-p$. Moneta jest rzucana raz po razie do momentu N dwukrotnego pojawienia się orła w dwóch ostatnich rzutach.
Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej N.

Uwaga. Jeżeli w dwóch pierwszych rzutach pojawi się orzeł, to $N = 2$. Jeżeli w pierwszym rzucie pojawi sie reszka, a orzeł pojawi się w drugim i trzecim rzucie, to $N = 3$.

Wskazówka. Ułożenie równania rekurencyjnego na wartość oczekiwaną zmiennej losowej N, tj. $E(N)$, może okazać się pomocne.

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie skoncentrowanym na półprostej $[1,\infty)$ i skończonym drugim momencie. Niech

$$T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 X_2 \cdots X_n, \quad U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 X_2^2 \cdots X_n^2$$

natomiast $a = E \ln X_1$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, \ln X_1$.
Oblicz granicę ciągu prawdopodobieństw

$$P(T_n \leq U_n^{1/\sqrt{n}} e^{na}).$$

Zadanie 10. Niech X oznacza liczbę sukcesów w n niezależnych próbach o prawdopodobieństwie sukcesu p, tzn. X ma rozkład binomialny $B(n, p)$.
Niech φ będzie JNM (jednostajnie najmocniejszym) testem do weryfikowania hipotezy $H_0 : p \leq p_0$, przy hipotezie alternatywnej $H_1 : p > p_0$
na poziomie istotności α.

(a) Podać postać testu φ.

(b) Dla $n = 6$ i $p_0 = 0.25$ oraz $\alpha = 0.05$ wyznaczyć dokładną postać testu z punktu (a). Następnie obliczyć moc tego testu przy alternatywie $p = 0.4$.

(c) Niech $p_0 = 0.25$ i $\alpha = 0.05$. Korzystając z (i) tablic rozkładu dwumianowego, lub (ii) przybliżenia rozkładem normalnym, wyznaczyć wartość n tak, aby moc testu z punktu (a) przy alternatywie $p = 0.4$ wynosiła co najmniej 0.7.