Test kwalifikacyjny na studia doktoranckie, rok 2015;
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.

Zadanie 1. Niech $f(x) = e^{-x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.
a) Udowodnij, że $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ dla wszystkich x, $y \in \mathbb{R}$.
b) Korzystając z szeregu Taylora funkcji f znajdź wzór na n-tą pochodną f w punkcie 0.
c) Udowodnij, że

$$\int_0^1 f(x)\, dx \geq \frac{1}{2}.$$

Zadanie 2. Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$ udowodnij, że f jest funkcją prawie wszędzie równą zero, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:
a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x-1)$.
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(2x)$.
c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2f(2x)$.

Zadanie 3. Niech E będzie elipsą w $\mathbb{R}^2$ zadaną równaniem $x^2 + 3xy + 10y^2 = 5$. Niech G będzie grupą złożoną ze wszystkich liniowych $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przekształcających E na E ($g(E) = E$).
a) Uzasadnij, że G jest nietrywialna.
b) Uzasadnij, że G jest nieskończona.
c) Rozstrzygnij (z uzasadnieniem), czy G jest abelowa.

Zadanie 4. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Dla podanych otwartych $U, V \subseteq \mathbb{C}$ uzasadnij, że istnieje homeomorfizm $f\colon U \to V$ i zbadaj, czy istnieje homeomorfizm $h\colon U \to V$ będący funkcją holomorficzną.
a) $U = \mathbb{C}$, $V = D$.
b) $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $V = D \setminus \{0\}$.

Zadanie 5. Rozstrzygnij z uzasadnieniem:
a) ile jest 15-elementowych grup abelowych?
b) ile jest 15-elementowych grup nieabelowych?

Zadanie 6. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B definiujemy jako zbiór par uporządkowanych $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$.
a) Podać przykład niepustych zbiorów A, B takich, że $A \cap B = A \times B$. Odpowiedź uzasadnić.
b) Wykazać, że jeśli $A = A \times A$, to $A = \emptyset$. Rozumowanie należy przeprowadzić posługując się aksjomatami teorii mnogości ZFC.

Zadanie 7.
a) Na płaszczyźnie euklidesowej wskazać zbiór Y, dla którego jednocześnie zachodzą warunki:

$$\mathrm{cl}(Y) \neq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y))) \quad \text{oraz } \mathrm{int}(Y) \neq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(Y))).$$

Odpowiedź uzasadnić.
(b) Wykazać, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej X i dowolnego zbioru $Y \subseteq X$ zachodzą równości:

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y)))) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{cl}(\mathrm{int}(Y)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(Y)))).$$

`Uwaga:` dla $Z \subseteq X$, $\mathrm{cl}(Z)$ oznacza domknięcie zbioru Z, zaś $\mathrm{int}(Z)$ wnętrze zbioru Z.

Zadanie 8. W celi więziennej są 3 drzwi. Pierwsze drzwi prowadzą do tunelu, który prowadzi na wolność, i przejście tego tunelu zabiera 3 dni. Drugie drzwi prowadzą do tunelu, który prowadzi do tej samej celi i przejście tego tunelu zabiera 2 dni. Trzecie drzwi prowadzą do tunelu, który prowadzi do tej samej celi i przejście tego tunelu zabiera 5 dni. Przyjmując, że więzień wybiera każde drzwi z tym samym prawdopodobieństwem, znaleźć oczekiwany czas po którym więzień znajdzie się na wolności.

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o średniej zero i wariancji 1, a $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ponadto niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ, a U zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Przyjmijmy, że wszystkie zmienne losowe $U, X_1, X_2, \ldots$ oraz proces $\{N(t)\}$ są wzajemnie niezależne. Niech

$$Y_n \stackrel{df}{=} \frac{S_{[N(n)U]}}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \ [x] \text{ jest częścią całkowitą } x.$$

Czy ciąg zmiennych losowych $Y_n, n \geq 1$, jest zbieżny według rozkładu?
Jeżeli tak, znaleźć rozkład graniczny.

Zadanie 10.
a) Sformułować podstawowy lemat Neymana-Pearsona.
b) Wykorzystując lemat Neymana-Pearsona znaleźć test dla testowania hipotezy zerowej H_0, że zmienna losowa ma rozkład normalny ze średnią 3 i wariancją 1, tj. rozkład $N(3, 1)$, przeciwko hipotezie alternatywnej H_1, że zmienna losowa ma rozkład normalny $N(5, 1)$.